令和７年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

# 物　理　学　専　攻

## 筆　記　試　験　問　題

# 基礎数学

解答には結果だけでなく，考え方や計算の経過を記すこと．（別に指示がある場合を除く．）

《令和６年８月２０日（火）》

# 問題1 (基礎数学)

## [1], [2] と [3], [4] はそれぞれの解答用紙に解答せよ.

**[1]** 以下の行列 $A$ を考える.

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

1) 行列 $A$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2$ とそれぞれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を求めよ．ただし，$\lambda_1 < \lambda_2$ とし，固有ベクトルは大きさが 1 となるように規格化して，第 1 成分が正の実数となるようにせよ.

2) 以下を満たす 2 行 2 列のユニタリ行列 $U$ を 1 つ示せ（答えのみを示せ）.

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U^{-1}$$

3) $\exp(i\pi A)$ を計算し，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の形で具体的な数値を示せ．ただし，$i$ は虚数単位であり，行列 $M$ の指数関数 $\exp(M)$ は，$M^0$ を単位行列として，

$$\exp(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$$

である.

**[2]** $z = e^{i\theta}$ とおくことにより，以下の積分 $I$ を複素積分に書き換え，$I$ の値を求めよ．ただし，$i$ は虚数単位である.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{13 + 5\cos\theta} d\theta$$

**[3]** 関数 $V(x,y,z)$ が，$V(x,y,z)=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ で与えられているとき，次の問いに答えよ．

1) 勾配ベクトル $\boldsymbol{\nabla}V(x,y,z)$ を求めよ．

2) $z$ 軸を中心軸とする半径 $a$ の無限に長い円筒上での面積分 $I=\displaystyle\int_S \boldsymbol{\nabla}V\cdot\boldsymbol{n}dS$ を，具体的に面積分を実行することにより求めよ．ここで，$S$ は円筒の表面であり，$\boldsymbol{n}$ は $S$ の外向きの単位法線ベクトルである．

**[4]** 周期 $2\pi$ の周期関数 $f(x)$ について，以下で表現されるものを考える．

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos(mx)$$

ただし，$a_0, a_m\ (m=1,2,3,...)$ は定数とする．

1) 積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)dx$ を求めよ．ただし，$m,n=1,2,3,...$ とする．

2) 積分 $I=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx$ を $a_0, a_m$ を用いて表せ．

3) $f(x)=x^2\ (-\pi\leqq x<\pi)$ の場合を考えることで，$\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4}$ の値を求めよ．

令和７年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

# 物　理　学　専　攻

## 筆　記　試　験　問　題

# 力学

解答には結果だけでなく，考え方や計算の経過を記すこと.（別に指示がある場合を除く.）

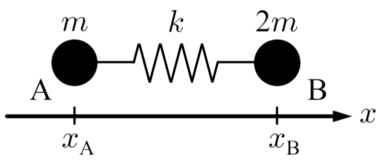
《令和６年８月２０日（火)》

# 問題2 (力学)

## [1] と [2] はそれぞれの解答用紙に解答せよ.

**[1]** ばね定数 $k$, 自然長 $l$ のばねでつながれた質点A(質量 $m$)と質点B(質量 $2m$)の運動を考える. 質点間の距離の変化は十分に小さく, 質点AとBが衝突することはない. ばねが曲がることはなく, 復元力は質点AとBを結ぶ方向にのみはたらくと考えよ. 重力, 空気抵抗, まさつ力は考えなくてよい.

1) 右図のように座標を取り, $x$ 方向の一次元運動を考える. 質点AとBの位置をそれぞれ $x_{\mathrm{A}}$, $x_{\mathrm{B}}$ ($x_{\mathrm{A}} < x_{\mathrm{B}}$) として, 以下の問いに答えよ.



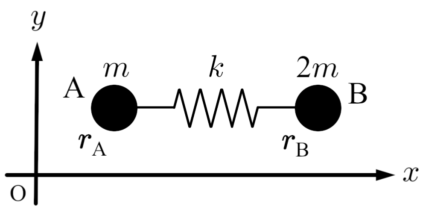

a) 質点AとBに対して, それぞれの運動方程式を与えよ.

b) 重心の位置は $X = \dfrac{1}{3}(x_{\mathrm{A}} + 2x_{\mathrm{B}})$ で与えられる. $X$ に対する微分方程式を与えよ.

c) 相対座標 $x_{\mathrm{r}} = x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}$ に対する微分方程式を与えよ.

d) 質点AとBがそれぞれの平衡位置 $x_{\mathrm{A}} = 0$, $x_{\mathrm{B}} = l$ で静止している状況で, 質点Aに対して $x$ 方向の初速 $v_0 (> 0)$ を与えた. 初速を与えた時刻を $t = 0$ として, $t \geq 0$ における $x_{\mathrm{A}}(t)$ を求めよ.

2) 下図のように座標を取り, $xy$ 平面内の二次元運動を考える. 質点AとBの位置をそれぞれ $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} = (x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}})$, $\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} = (x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}})$ とする. 質点AとBがそれぞれの平衡位置 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} = (0, 0)$, $\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} = (l, 0)$ で静止している状況で, 質点Aに対して $y$ 方向の初速 $\boldsymbol{v}_0 = (0, v_0)$ を与えた ($v_0 > 0$). その後の運動について, 以下の問いに答えよ.

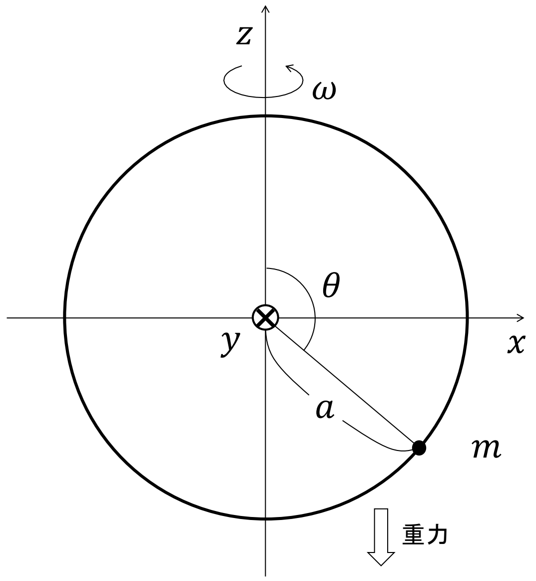



a) 系の全運動量 $\boldsymbol{P}$ の初期値を求めよ. $\boldsymbol{P}$ は保存するが, その理由を簡潔に述べよ.

b) 紙面に対して垂直上向きに $z$ 軸をとるとき, 重心のまわりの全角運動量 $\boldsymbol{L}$ の $z$ 成分 $L_z$ の初期値を求めよ.

c) 角運動量保存則を考慮することにより, 問 1) d) の場合と比べて, ばねはどちらの方が長く伸びるか, 理由とともに答えよ.

**[2]** 鉛直面に平行に置かれた滑らかなリングに質点が束縛されている．この質点の質量を $m$，リングの半径を $a$ とし，鉛直下向きに一様な重力（重力加速度の大きさ $g$）がはたらいている．図のように，はじめ，リングは $xz$ 平面に置かれており，質点の位置を $z$ 軸を基準として，リングに沿った角度 $\theta$（$0 \leq \theta < 2\pi$）で表す．時刻 $t = 0$ からリングを図中の向きに一定の角速度 $\omega$ で，$z$ 軸を回転軸として回転させた．このとき，質点の位置は $\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (a\sin\theta\cos\omega t, a\sin\theta\sin\omega t, a\cos\theta)$ と表される．$t \geq 0$ における質点の運動について，以下の問いに答えよ．




1) $\boldsymbol{r}$ を時間微分することにより，時刻 $t$ における質点の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ のデカルト座標での成分 $(v_x,\ v_y,\ v_z)$ を $a$，$\theta$，$\dot{\theta}$（$\theta$ の時間微分），$\omega$，$t$ を用いて書け．

2) 質点の運動エネルギー $K$ と重力によるポテンシャル $U$ を $a$, $\theta$, $\dot{\theta}$, $\omega$, $t$, $g$, $m$ の中から必要なものを用いて表せ．ただし，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のときのポテンシャルを $0$ とする．

3) この質点のラグランジアン $L$ を $a$，$\theta$，$\dot{\theta}$，$\omega$，$t$，$g$，$m$ の中から必要なものを用いて書け．

4) 有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(\theta)$ をラグランジアンを用いて次式により導入する．

$$L = T(\dot{\theta}) - V_{\text{eff}}(\theta)$$

ただし, $T(\dot{\theta})$ は運動エネルギーの $\dot{\theta}$ に依存する部分を取り出したものである．$V_{\text{eff}}(\theta)$ を求めよ．

5) $\omega = \sqrt{\dfrac{2g}{a}}$ の場合の $V_{\text{eff}}(\theta)$ のグラフを $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で解答用紙裏面の図に示せ．

6) 問 5) の場合において，$t = 0$ で $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$，$\dot{\theta} = \beta$ だったとする．質点が $\theta = \pi$ に到達するために，$\beta$ が満たすべき条件を求めよ．

令和７年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

# 物　理　学　専　攻

## 筆　記　試　験　問　題

# 電磁気学

解答には結果だけでなく，考え方や計算の経過を記すこと．(別に指示がある場合を除く.)

《令和６年８月２０日（火)》

# 問題 3 (電磁気学)

## [1] と [2] はそれぞれの解答用紙に解答せよ.

**[1]** 真空中の誘電率を $\varepsilon_0$ として以下の問いに答えよ.

1) 図 1 のように，真空中におかれた無限に長い半径 $a$ の円柱の内部に，電荷密度 $\rho$ ($\rho > 0$) で一様に電荷が分布している.

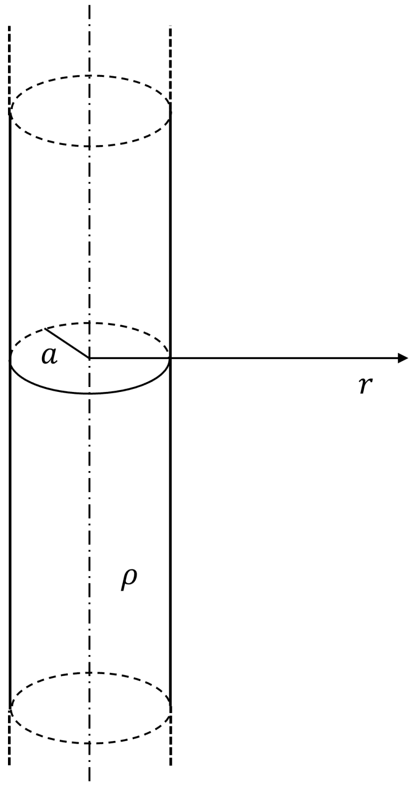



図 1

a) 円柱の中心軸からの距離 $r$ の関数として，電場は $\boldsymbol{E} = E(r)\boldsymbol{e}_r$ と表される．ここで，$\boldsymbol{e}_r$ は $r$ が増加する方向の単位ベクトルである．ガウスの法則を使って，$E(r)$ を求めよ.

b) $r$ を横軸にとった $E(r)$ のグラフを示せ.

c) 円柱の中心軸から距離 $r$ の位置での電位を求めよ．ただし円柱の側面上を電位の基準とする.

（次ページに続く）

2) 接地された無限に広い平板導体が真空中に置かれている．図 2 のように，導体表面に垂直な方向に $x$ 軸をとり，表面上に $y, z$ 軸をとる．いま，原点 O から $x$ 方向に距離 $d$ だけ離れた位置に，$z$ 軸と平行に無限に長い直線状電荷 A がある．A の線電荷密度を $\lambda$ $(\lambda > 0)$ とする．

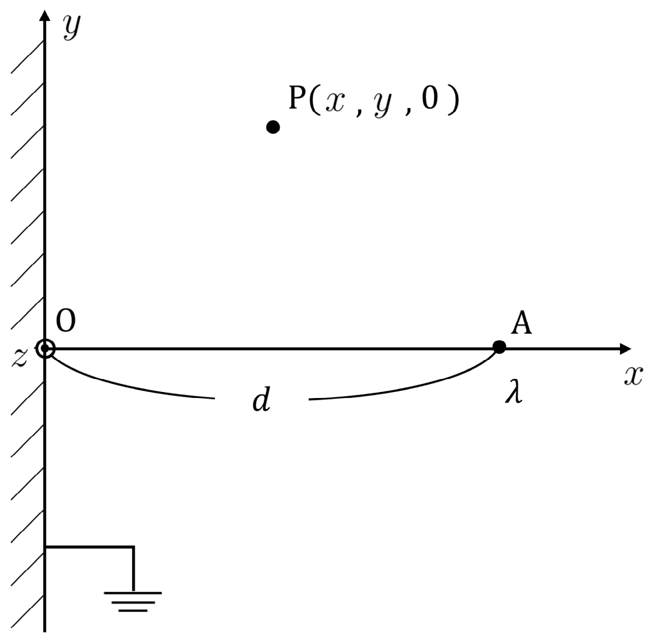



図 2

a) 鏡像法により，点 $\mathrm{P}(x, y, 0)$ での電位を求めよ．ただし原点 O を電位の基準とする．

b) 直線状電荷 A の単位長さあたりにはたらく力の大きさと向きを求めよ．

c) 平板導体の表面に誘導される電荷の表面電荷密度 $\sigma$ を，$y$ の関数として表せ．

d) 問 2) c) の結果を使って，平板導体の表面に誘導される $z$ 軸方向の単位長さあたりの電荷 $q$ を求めよ．

**[2]** 真空中で電流がつくる電場や磁場に関する以下の問いに答えよ． $\mu_0$ を真空中の透磁率とする．

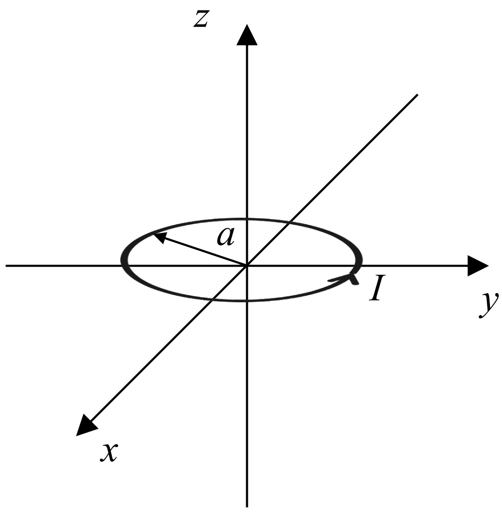



図 1

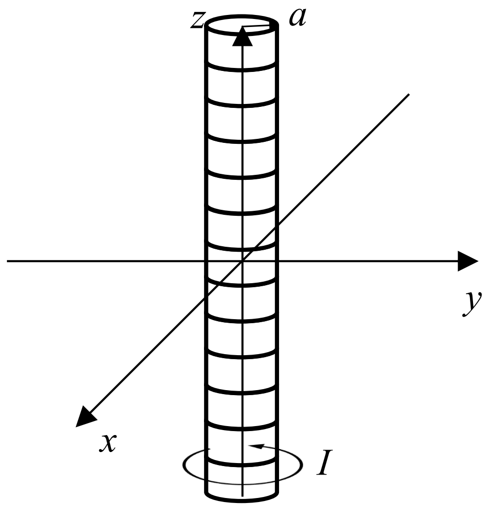



図 2

1) 図 1 のように， 原点を中心に $xy$ 平面上に置かれている半径 $a$ の円形の回路に，$z$ 軸正方向から見て反時計回りに定常電流 $I$ が流れている．下記のビオ・サバールの法則を用いて，$z$ 軸上の磁束密度 $\boldsymbol{B}_1(z)$ を求めよ．$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'$ はそれぞれ磁束密度の位置と電流素片の位置であり，$C$ は電流の経路を表す．

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

2) 図 2 のように，$z$ 軸を中心軸として半径 $a$， 単位長さあたりの巻き数 $n$ の無限に長いソレノイドが置かれている．ソレノイドには図 1 と同様の向きに定常電流 $I$ が流れている．

a) 問 1) の結果を用いて，$z$ 軸上の磁束密度 $\boldsymbol{B}_2(x = 0, y = 0, z)$ を求めよ．

b) 系の対称性から，$z$ 軸上以外の位置での磁束密度は $z$ 成分のみをもつ．このことを用いて，$z$ 軸上以外の位置での磁束密度 $\boldsymbol{B}_2(x, y, z)$ を求めよ．

（次ページに続く）

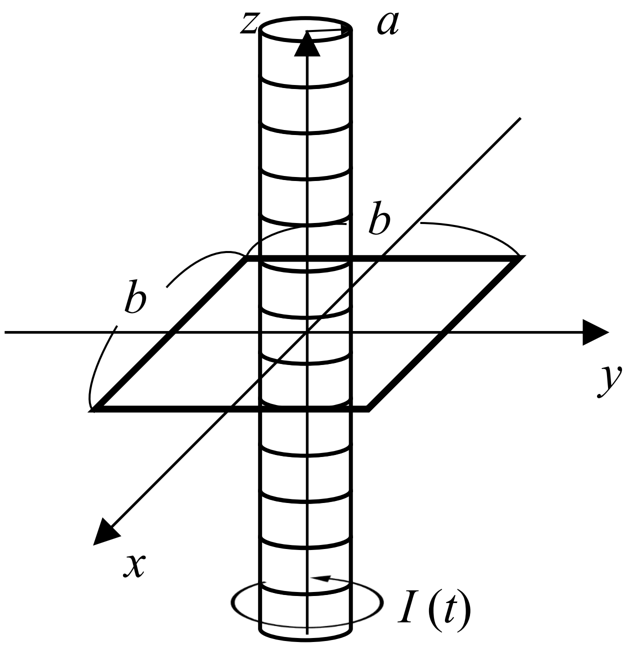



図 3

3) 図 3 のように，図 2 と同様のソレノイドに時間的に変化する電流 $I(t)$ （$z$ 軸正方向から見て反時計回りを正の向きとする）を流し，さらに 1 辺が $b$ （$b > 2a$）の正方形の回路を原点を中心に $xy$ 平面に置く．ただし，電流の時間変化は十分遅く，磁束密度は $I(t)$ が時間的に一定の場合と同じ式で与えられるとする．

a) 正方形の回路に生じる誘導起電力を求めよ．ただし，誘導起電力の向きは $z$ 軸正方向から見て反時計回りを正の向きとする．

b) $xy$ 平面上の誘導電場は $E(r,t)\boldsymbol{e}_\phi$ と表される．ここで，$r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\boldsymbol{e}_\phi = (-y/r, x/r, 0)$ である．$E(r,t)$ を求めよ．ただし，正方形回路に流れる電流によって生じる磁場の影響は無視できるものとする．

令和７年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

# 物　理　学　専　攻

## 筆　記　試　験　問　題

# 量子力学

解答には結果だけでなく，考え方や計算の経過を記すこと．(別に指示がある場合を除く．)

《令和６年８月２０日（火)》

# 問題4 (量子力学)

## [1] と [2] はそれぞれの解答用紙に解答せよ.

以下ではプランク定数を $2\pi$ で割ったものを $\hbar$ とする.

**[1]** 1次元調和振動子ポテンシャル中を運動する質量 $m$ の粒子を考える. この粒子のハミルトニアンは次の式で与えられる.

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

ここで $x$ は位置演算子, $p$ は運動量演算子で $p = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$ であり, $\omega$ を正の定数とする. 互いにエルミート共役な演算子 $a, a^\dagger$ を以下のように定義する.

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p$$

また必要であれば以下の公式を用いてよい.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-A\xi^2\right)d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \qquad (A \text{ は正の定数})$$

1) $a, a^\dagger$ の交換子 $[a, a^\dagger]$ を求めよ.

2) ハミルトニアン $H_0$ を演算子 $a, a^\dagger$ を用いて表せ.

3) この系の基底状態の波動関数 $\varphi_0(x)$ は $a\varphi_0(x) = 0$ を満たす. 規格化された波動関数 $\varphi_0(x)$ を求めよ.

4) $\varphi_n(x) = c_n(a^\dagger)^n\varphi_0(x)$ は $a^\dagger a\varphi_n(x) = n\varphi_n(x)$ を満たすことを示せ. そして, 規格化定数 $c_n$ を求めよ. ただし, $n$ は負でない整数である.

次に, この1次元調和振動子ポテンシャル中を運動する粒子が電荷 $q$ を持っている場合を考える. ある時刻に一様な電場 $\mathcal{E}$ を $+x$ 方向に印加した. ここで, $q$ と $\mathcal{E}$ は正の定数である.

5) 電場を印加した後の系の基底状態のエネルギー $\tilde{E}_0$ を求めよ. ただし, 静電ポテンシャルは $x = 0$ でゼロとする.

6) 電場を印加した後の系の第一励起状態の規格化された固有関数 $\tilde{\varphi}_1(x)$ を求め, $\tilde{\varphi}_1(x)$ の確率密度のグラフの概形を図示せよ.

**[2]** 孤立した 1 電子原子の $p$ 軌道 (軌道角運動量 $l=1$ の状態) におけるスピン軌道相互作用の効果を以下のように考える．
$\boldsymbol{L}$ を電子の軌道角運動量演算子，$\boldsymbol{S}$ をスピン角運動量演算子とする．$\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{S}$ は可換であり，それぞれ角運動量の交換関係 $[L_\alpha, L_\beta] = i\hbar \sum_{\gamma=x,y,z} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma$, $[S_\alpha, S_\beta] = i\hbar \sum_{\gamma=x,y,z} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma$ を満たしている．ここで，$\alpha, \beta$ はそれぞれ $x, y, z$ のいずれかを表し，$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ はレビ・チビタ記号を表す．すなわち，$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ は $\varepsilon_{xyz} = \varepsilon_{yzx} = \varepsilon_{zxy} = 1$，$\varepsilon_{zyx} = \varepsilon_{yxz} = \varepsilon_{xzy} = -1$ であり，それ以外では 0 となる．このとき，以下の問いに答えよ．

1) 全角運動量を $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ とすると，$\boldsymbol{J}$ についても交換関係 $[J_\alpha, J_\beta] = i\hbar \sum_{\gamma=x,y,z} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma$ が成り立つことを示せ．

2) 問 1) の結果を用いて，交換子 $[\boldsymbol{J}^2, J_z]$ を求めよ．

3) 軌道角運動量 $l=1$ の状態に対して，$L_z$ の固有値が $m_L\hbar$ $(m_L = 1, 0, -1)$，$S_z$ の固有値が $m_S\hbar$ $(m_S = \pm 1/2)$ となる $\boldsymbol{L}^2, L_z, \boldsymbol{S}^2, S_z$ の同時固有状態を $|m_L, m_S\rangle$ とする．すなわち，

$$L_z|m_L, m_S\rangle = m_L\hbar|m_L, m_S\rangle$$
$$S_z|m_L, m_S\rangle = m_S\hbar|m_L, m_S\rangle$$

である．また，$|m_L, m_S\rangle$ は規格化されているものとする．この 6 個の状態はそれぞれ $J_z$ の固有状態になっていることを確認し，その固有値を求めよ．

4) 問 3) の状態のうち，$J_z$ の固有値が $3\hbar/2$ の状態は $\boldsymbol{J}^2$ の固有状態になっていることを確認し，その固有値を求めよ．ここで，$L_\pm = L_x \pm iL_y$, $S_\pm = S_x \pm iS_y$ に対して，

$$L_\pm|m_L, m_S\rangle = \sqrt{(1 \mp m_L)(2 \pm m_L)}\,\hbar\,|m_L \pm 1, m_S\rangle$$
$$S_\pm|m_L, m_S\rangle = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \mp m_S\right)\left(\frac{3}{2} \pm m_S\right)}\,\hbar\,|m_L, m_S \pm 1\rangle$$

となることを用いてよい．

5) 問 3) の状態のうち，$J_z$ の固有値が $\hbar/2$ の状態空間について考える．

   a) $J_z$ の固有値が $3\hbar/2$ の状態に $J_- = L_- + S_-$ を作用させた状態を $|\psi_1\rangle$ とする．$|\psi_1\rangle$ が $\boldsymbol{J}^2$ の固有状態となることを示し，$|\psi_1\rangle$ に対する $\boldsymbol{J}^2$ の固有値を求めよ．

   b) $|\psi_1\rangle$ とは独立な $\boldsymbol{J}^2$ の固有状態 $|\psi_2\rangle$ を与え，$|\psi_2\rangle$ に対する $\boldsymbol{J}^2$ の固有値を求めよ．

6) スピン軌道相互作用の有効ハミルトニアンは，定数 $\lambda$ を用いて

$$H_{\mathrm{LS}} = \lambda \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$$

で表される．$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S} = (\boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{L}^2 - \boldsymbol{S}^2)/2$ とかけることを用いて，孤立した 1 電子原子の $p$ 軌道のエネルギー準位が $H_{\mathrm{LS}}$ を加えることでどう変化するかを議論せよ．

令和７年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

# 物　理　学　専　攻

## 筆　記　試　験　問　題

# 熱・統計力学

解答には結果だけでなく，考え方や計算の経過を記すこと．(別に指示がある場合を除く．)

《令和６年８月２０日（火)》

# 問題5 (熱・統計力学)

## [1] と [2] はそれぞれの解答用紙に解答せよ.

**[1]** 気体の状態変化に関する以下の問いに答えよ．気体定数を $R$ とする．

1) 1 モルの理想気体を用いた状態 1 から状態 2 への準静的な状態変化について，図 1 に示すような 2 つの過程を考える．過程 A は等温過程（状態 1 → 2），過程 B は断熱過程（状態 1 → 3）と定積過程（状態 3 → 2）による変化である．状態 1 の体積は $V_1$，圧力は $P_1$，状態 2 の体積は $V_2$ であった（$V_1 > V_2$）．理想気体の定積モル比熱を $C_V$ とする．

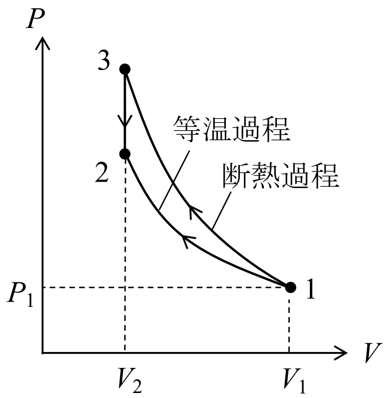



図 1

a) 状態 2 における圧力 $P_2$ と温度 $T_2$ を $P_1$，$V_1$，$V_2$，$R$ の中から必要なものを用いて表せ．

b) 断熱過程（状態 1 → 3）における温度 $T$ と体積 $V$ の関係が

$$TV^{R/C_V} = \text{定数}$$

で表されることを示せ．

c) 状態 3 における温度 $T_3$ と圧力 $P_3$ を $P_1$，$V_1$，$V_2$，$R$，$C_V$ を用いて表せ．

d) 過程 A におけるエントロピー変化 $\Delta S_A$ を $V_1$，$V_2$，$R$ を用いて表せ．またこれが過程 B におけるエントロピー変化 $\Delta S_B$ と同じになることを，状態 1 → 3，状態 3 → 2 のエントロピー変化を計算することにより確かめよ．

（次ページに続く）

e) 状態1におけるエントロピーを $S_1$ としたとき，過程A，過程Bのそれぞれにおける状態1から状態2への状態変化の概要を，縦軸にエントロピー $S$，横軸に温度 $T$ を取った平面上に図示せよ．図中には状態2，状態3の温度とエントロピーを $S_1$，$T_2$，$T_3$，$C_V$ の中から必要なものを用いて記入すること．

2) 図2のように体積が半分になるように壁で内部が仕切られた体積 $2V_0$ の容器があり，初期状態において，片方に温度 $T_0$ の1モルの理想気体があり，もう片方は真空となっていた．この壁を取り外し，気体を自由膨張させる過程を考える．この過程において容器外部との熱の出入りはなく，壁の体積は無視できるものとする．

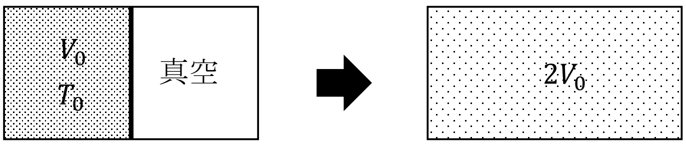



図 2

a) 自由膨張過程の前後で気体の温度はどのように変化するか．熱力学第一法則を使って，増加，減少，一定の3つの中から答えよ．

b) 図2の自由膨張過程における気体のエントロピー変化を，$T_0$，$V_0$，$R$ の中から必要なものを用いて表せ．

**[2]** 角振動数 $\omega$ の1次元調和振動子を出発点として，調和振動子集団の熱力学的性質を以下に従って考察する．ここで，系の温度を $T$，ボルツマン定数を $k_{\mathrm{B}}$，プランク定数を $h$ とし，さらに $\beta = \dfrac{1}{k_{\mathrm{B}}T}$，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ として，以下の問いに答えよ．

まず，調和振動子が1個ある系を量子力学的に考えてみよう．この系の振動子の固有エネルギーは $\varepsilon_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$ に離散化される．ここで，$n = 0, 1, 2, \cdots$ である．

1) この系の状態和 $z$ が $z = \dfrac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$ となることを示せ．

2) この系の内部エネルギー $u(T, \omega) = -\dfrac{\partial}{\partial\beta}\ln z$ を $\hbar, \beta, \omega$ を用いて表せ．

次に，角振動数 $\omega$ が状態密度 $P(\omega)$ に従って分布した $N$ 個の調和振動子集団を考える．$P(\omega)$ は振動子あたりとして，系の内部エネルギー $U(T)$ は $U(T) = N\displaystyle\int_0^{\infty} P(\omega)u(T, \omega)d\omega$ によって計算できるものとする．

3) 状態密度が $P(\omega) = \delta(\omega - \Omega)$ で与えられるとき，以下の問いに答えよ．ただし，$\Omega$ は正の定数とし，$\delta(x)$ はディラックのデルタ関数とする．

   a) 熱容量を $C(T)$ としたとき，$\dfrac{C(T)}{Nk_{\mathrm{B}}}$ を $\hbar, \beta, \Omega$ を用いて表せ．

   b) 低温極限 $k_{\mathrm{B}}T \ll \hbar\Omega$ で，$C(T) \approx Nk_{\mathrm{B}}\left(\dfrac{\hbar\Omega}{k_{\mathrm{B}}T}\right)^2 \exp\left(-\dfrac{\hbar\Omega}{k_{\mathrm{B}}T}\right)$ となることを示せ．

   c) 高温極限 $k_{\mathrm{B}}T \gg \hbar\Omega$ における熱容量 $C(T)$ の値を求めよ．

4) 状態密度が $P(\omega) = \begin{cases} \dfrac{3\omega^2}{\omega_D^3} & 0 \le \omega \le \omega_D \\ 0 & (\text{上記以外}) \end{cases}$ で与えられるとき，以下の問いに答えよ．ただし，$\omega_D$ は正の定数とする．

   a) 熱容量 $C(T)$ が低温極限 $k_{\mathrm{B}}T \ll \hbar\omega_D$ で $T^3$ に比例することを示せ．

   b) 高温極限 $k_{\mathrm{B}}T \gg \hbar\omega_D$ の熱容量は，問3)c) の結果と一致する．その理由を簡潔に述べよ．

   c) 熱容量 $C(T)$ の概形を温度の関数としてグラフに描け．(このとき，低温極限および高温極限の振る舞いが図からわかるようにすること．)