令和６年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

物　理　学　専　攻

筆　記　試　験　問　題

基礎数学

解答には結果だけでなく，考え方や計算の経過を記すこと．(別に指示がある場合を除く．)

《令和５年８月２２日（火)》

問題1 (基礎数学)

[1], [2], [3], [4] はそれぞれの解答用紙に解答せよ.

[1] 以下の行列 A を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) A の固有値 λ_1, λ_2 $(\lambda_1 > \lambda_2)$ と，それぞれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$ を求めよ.

2) 行列 $B = \frac{1}{5}A$ で表現される一次変換について考える.
領域 $V = \{(x, y) | -1 \leqq x \leqq 1, -1 \leqq y \leqq 1\}$ を，一次変換 B^n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で変換した領域 V_n は，$n \to \infty$ の極限でどのような図形になるか図示せよ.

[2] 以下の積分に関する問いに答えよ.

1) 二重積分 $K = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)}dxdy$ を極座標を用いて求めよ．ただし，a は正の定数とする.

2) 実数 t に対して積分 $I(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+2atx}dx$ を求めよ.

3) 2) で得られた $I(t)$ を $t = 0$ のまわりで展開することにより，
積分 $I_m = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^{2m}e^{-ax^2}dx$ $(m = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ.

[3] 次の微分方程式の一般解を求めよ．結果は虚数単位 i を含まない形で記せ．

$$\frac{d^3x}{dt^3}+3\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+2x=e^t$$

[4] 定積分

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix}}{(1+x^2)^2}dx$$

の値を，複素積分を用いて求めよ．必要があれば，複素関数 $f(z)$ の孤立特異点 $z=a$ が n 位の極である時，留数 $\mathrm{Res}(f(z),a)$ が次式で与えられることを用いてよい．

$$\mathrm{Res}(f(z),a)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-a)^n f(z)]$$

令和６年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

物　理　学　専　攻

筆　記　試　験　問　題

力学

解答には結果だけでなく，考え方や計算の経過を記すこと．（別に指示がある場合を除く．）

《令和５年８月２２日（火）》

問題2 (力学)

[1] と [2] はそれぞれの解答用紙に解答せよ.

[1] 質量 m の質点がポテンシャル $U_0(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}kz^2$（$k$ は正の定数）のもとで3次元空間中を運動する．ここで，$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ は質点の位置ベクトルである．以下の問いに答えよ.

1) 質点に対する運動方程式を $\boldsymbol{r}$ で表せ.

2) 原点のまわりの質点の角運動量 $\boldsymbol{L}$ が時間によらず一定となることを運動方程式を用いて示せ.

3) 時刻 t における質点の x 座標 $x(t)$ について，運動方程式の一般解を求めよ.

4) 時刻 $t = 0$ において $\boldsymbol{r}(0) = (a, 0, 0)$, $\dot{\boldsymbol{r}}(0) = \left(0, \frac{a}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}, \frac{a}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$（$a$ は正の定数）として，以下の問いに答えよ.

   a) 初期条件を満たす解 $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよ．解答は結果のみ示せばよい.

   b) 運動の軌跡の概形を xy, yz 平面上にそれぞれ投影して，解答用紙のグラフに図示せよ.

   c) 質点の運動エネルギーが $t = 0$ 以降で最初に最大となる時刻 t_1 を求めよ.

次に，以下の式で表される微小なポテンシャル $U_1(\boldsymbol{r})$ を $U_0(\boldsymbol{r})$ に加えた，ポテンシャル $U(\boldsymbol{r}) = U_0(\boldsymbol{r}) + U_1(\boldsymbol{r})$ のもとでの運動について考える．ただし，ε は微小な正の定数であるとする.

$$U_1(\boldsymbol{r}) = \varepsilon(x + y + z)^2$$

5) 質点が原点のまわりを一定の角運動量 $\boldsymbol{L}$（$\boldsymbol{L} \neq \boldsymbol{0}$）で運動した．このときの $\boldsymbol{L}$ の方向を答えよ.

[2] 図のように，密度が一様な質量 m，長さ l の剛体棒を，端 A を支点として紙面に平行な平面内で回転できるようにした．この振り子の運動を考える．支点を原点とし，水平方向に x 軸，鉛直上向きに y 軸を取る．鉛直下方から測った棒の角度を θ，重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ．棒の太さ，支点での摩擦，空気抵抗は無視して良い．

$\theta = 0$ で静止している棒の下端 B に初速 $(v_x, v_y) = (V, 0)$ を与えた後の運動を考える．ただし，V は正の定数とする．

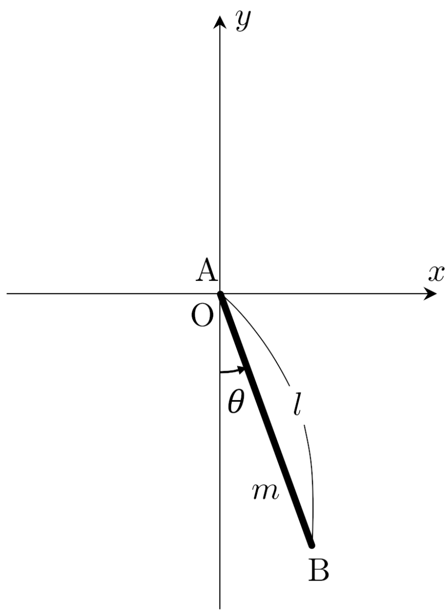
1) 棒の支点のまわりの慣性モーメントが $\frac{1}{3}ml^2$ となることを示せ．

2) θ に関する運動方程式（微分方程式）を与えよ．

3) V が十分に小さい場合，棒は $|\theta| \ll 1$ で微小振動する．振動の周期 T を求めよ．

4) $V > V_0$ を満たす場合，棒は支点のまわりを一回転する．V_0 を求めよ．

5) $V > V_0$ の初速を与えたところ，棒がちょうど一回転して B が A の真下を通過した瞬間に支点が外れた．この時刻をあらためて $t = 0$ とする．$t \geq 0$ における棒の重心の座標 $(x(t), y(t))$ を求めよ．



$\theta = 0$ で静止している棒の支点を水平方向に $X(t) = X_0 \cos(\Omega t)$ で微小振動させた場合を考える．ただし，X_0 と Ω は正の定数とする．

6) 支点とともに運動する座標系を考え，θ に関する運動方程式を与えよ．

7) $|\theta| \ll 1$ の場合を考える．運動方程式に基づいて，振り子の振れ角 θ の振幅が時間とともに増大するための Ω を求めよ．

正誤表

問題３（電磁気学）

[1]　1)　b)

誤　　“a, b, ρを用いて表せ”

正　　“$a, b, \rho, \varepsilon_0$を用いて表せ”

令和６年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

物　理　学　専　攻

筆　記　試　験　問　題

電磁気学

解答には結果だけでなく，考え方や計算の経過を記すこと．（別に指示がある場合を除く．）

《令和５年８月２２日（火）》

問題 3 (電磁気学)

[1] と [2] はそれぞれの解答用紙に解答せよ.

[1] 図 1 のように，真空中におかれた半径 a の円筒導体（内円筒）と半径 b の円筒導体（外円筒）からなる同軸円筒を考える．$a < b$ であり，円筒の長さは b に比べて十分長いものとする．また，それぞれの円筒導体の厚さは無視できるものとする．真空の誘電率を ε_0，真空の透磁率を μ_0，円筒軸を z 軸とし，座標は円筒座標系 (r, ϕ, z) で表すものとする．また，r, ϕ, z 方向の単位ベクトルは $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{e}_z$ とする．

1) 内円筒および外円筒に，z 軸方向の単位長さあたりそれぞれ $+\rho$ と $-\rho$ の電荷を与えたとき，以下の問いに答えよ．

   a) $z = 0$，$a < r < b$ における電場 $\boldsymbol{E}$ を求めよ．

   b) 外円筒を基準としたときの内円筒の電位 V を a, b, ρ を用いて表せ．

   c) 各点での電場のエネルギー密度を積分することで，同軸円筒の z 軸方向の単位長さあたりに蓄えられている静電場のエネルギー U_E を求めよ．

   d) 内円筒と外円筒の間を，誘電率が r に対して変化する誘電体で満たしたところ，内円筒と外円筒の間の電場の大きさが r に依存せずに一様になった．誘電体の誘電率 $\varepsilon(r)$ は r に対してどのような関数になるか答えよ．

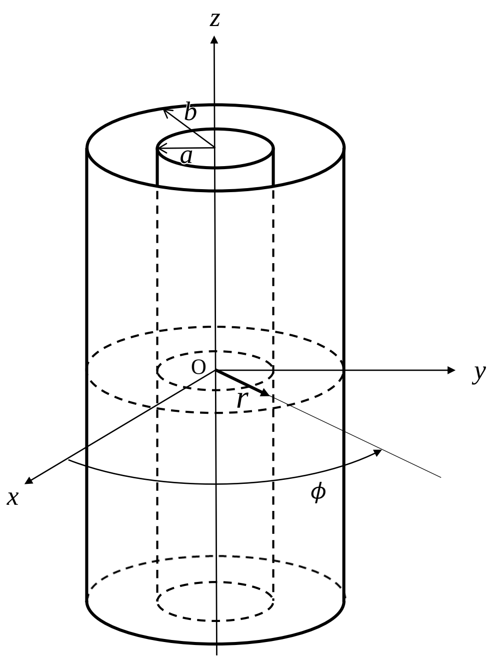


図 1

(次ページに続く)

2) 問 1)d) で考えた電荷と誘電体をすべて取り除き，内円筒と外円筒の間を真空に戻したのち，電流 $I(I > 0)$ を内円筒の $-z$ 方向と外円筒の $+z$ 方向に流したとき，以下の問いに答えよ．

   a) $z = 0$，$a < r < b$ における磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ．

   b) 同軸円筒の z 軸方向の単位長さあたりの自己インダクタンス L を求めよ．

   c) 同軸円筒の z 軸方向の単位長さあたりの静磁場のエネルギー U_M を求めよ．

3) 図 2 に示すように，図 1 の同軸円筒の一端の内円筒と外円筒の間に電圧 V を印加し，かつ同軸円筒の反対側の一端に抵抗 R を接続した状態を考える．$a < r < b$ の領域を電荷 $q(q > 0)$ の荷電粒子が z 軸に平行に直進するとき，荷電粒子の進む向きと速度の大きさ v を V, R, r, a, b, μ_0 のうち必要なものを用いて求めよ．ただし，円筒導体の電気抵抗値は抵抗 R に比べて無視できるくらい小さいものとする．また，荷電粒子があることによる電場や磁束密度への影響は無視してよい．

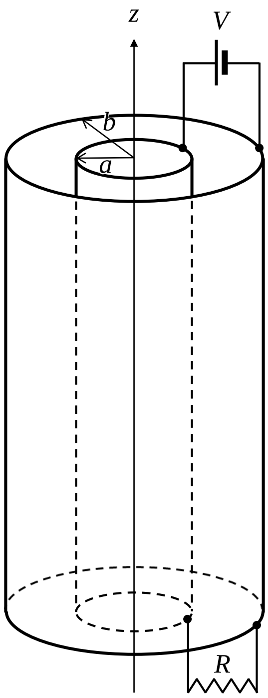


図 2

[2] 媒質中におけるマクスウェル方程式

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{j} + \varepsilon\mu \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{4}$$

を用いて以下の問いに答えよ．$\boldsymbol{E}$ は電場，$\boldsymbol{B}$ は磁束密度を表す．ε, μ, ρ, $\boldsymbol{j}$ はそれぞれ媒質中の誘電率, 透磁率, 電荷密度，電流密度を表す.

1) 真空中を z 方向へ伝搬する平面波の電磁波を考える．真空中では，$\rho = 0, \boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ である．電場 $\boldsymbol{E}(z,t)$, 磁束密度 $\boldsymbol{B}(z,t)$ は以下の式で表される．

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{A} \exp[i(kz - \omega t)], \quad \boldsymbol{B}(z,t) = \boldsymbol{A}' \exp[i(kz - \omega t)] \tag{5}$$

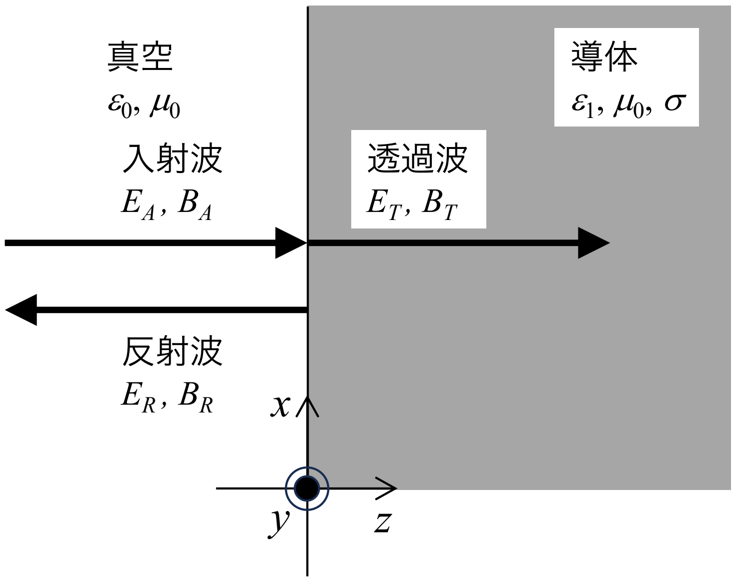
i は虚数単位である．k，ω はそれぞれ平面波の波数， 角周波数であり，正の実数とする．$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}'$ は定数ベクトルである.

a) $\boldsymbol{E}(z,t)$ が横波であることをマクスウェル方程式を用いて説明せよ.

b) $\boldsymbol{A} = (A_x, 0, 0)$ であるとき，$\boldsymbol{A}'$ を A_x, ω, k を用いて表せ.

c) k を $\varepsilon_0, \mu_0, \omega$ を用いて表せ.

（次ページに続く）



2) 電磁波が図のように真空から導体平面へ垂直に入射し，導体内部へと伝搬する様子について考える．$z < 0$ を真空，$z \geq 0$ を導体の領域とする．導体中では $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\mu = \mu_0$, $\rho = 0$ であり，$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$ が成り立つとする．σ は電気伝導度である．境界にて入射，反射，透過する電磁波は全て z 方向に伝搬し，電場は x 成分のみをもつとする．入射波，反射波，透過波の電場の x 成分 E_A, E_R, E_T は以下の式で与えられる．

$$E_A(z,t) = A \exp[i(kz - \omega t)] \tag{6}$$

$$E_R(z,t) = R \exp[i(-kz - \omega t)] \tag{7}$$

$$E_T(z,t) = T \exp[i(k'z - \omega t)] \tag{8}$$

ここで，ω, k, k', A, R, T は定数である．

a) 問 1)b) の結果および $z = 0$ における電場と磁場の境界条件を考慮し，T/A を k, k' を用いて表せ．

b) $E_T(z,t)$ に対する微分方程式を導出せよ．

σ が十分に大きく，$\sigma \gg \omega\varepsilon_1$ が成り立つときの導体中での電磁波の伝搬を考察する．

c) 問 2)b) で求めた微分方程式が以下のように近似できることを示せ．

$$\frac{\partial^2 E_T}{\partial z^2} = \sigma\mu_0 \frac{\partial E_T}{\partial t} \tag{9}$$

d) k' を $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu_0, \sigma, \omega$ の中から必要なものを用いて表せ．さらに，求めた k' を用いて $l = 2\pi/\,\mathrm{Re}(k')$ とするとき，$E_T(l,t)/E_T(0,t)$ を求めよ．

令和６年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

物　理　学　専　攻

筆　記　試　験　問　題

量子力学

解答には結果だけでなく，考え方や計算の経過を記すこと．(別に指示がある場合を除く.)

《令和５年８月２２日（火)》

問題 4 (量子力学)

[1] と [2] はそれぞれの解答用紙に解答せよ.

以下ではプランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ とする.

[1] 質量 m の粒子の 1 次元ポテンシャル $V(x)$ の下での運動を考える.

1) ポテンシャル $V(x)$ として以下の無限に深い井戸型ポテンシャルを考える.

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x \leq 0) \\ 0 & (0 < x < a) \\ \infty & (x \geq a) \end{cases} \tag{1}$$

エネルギーが低い方から数えて n 番目 (n =1, 2, ...) のエネルギー固有値を E_n，対応するエネルギー固有状態の波動関数を $\varphi_n(x)$ とする.

a) 波動関数 $\varphi_n(x)$ がみたす, 時間に依らないシュレディンガー方程式を $0 < x < a$ の範囲で与えよ.

b) エネルギー固有値 E_n と規格化された波動関数 $\varphi_n(x)$ を求めよ.

c) $\varphi_n(x)$ に対して位置 x の期待値 $\langle x \rangle$ を，波動関数を用いて計算せよ.

d) 粒子の波動関数が以下の形で与えられる場合を考える．この波動関数は規格化されている.

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \dfrac{2}{\sqrt{a}} \sin\left(\dfrac{2\pi}{a}x\right) & (0 < x \leq a/2) \\ 0 & (a/2 < x) \end{cases}$$

このとき粒子が基底状態 (n=1) に観測される確率 P を求めよ.

2) 次にポテンシャル $V(x)$ を以下のように変化させた.

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x \leq 0) \\ 0 & (0 < x < a) \\ U & (x \geq a) \end{cases} \tag{2}$$

ここで U は正の有限値である．このポテンシャルに対して束縛状態が存在する場合を考える.

a) 問 1) のポテンシャル (1) および問 2) のポテンシャル (2) に対する基底状態の波動関数のグラフの概形をそれぞれ図示せよ．ここでは波動関数の形を式で示す必要はない.

b) ポテンシャルが (1) から (2) に変化することによって，基底状態のエネルギー固有値は上がるか，それとも下がるかを述べよ．そのように変化する理由を問 2) a) の図に基づいて定性的に説明せよ.

[2] 大きさ $\dfrac{\hbar}{2}$ のスピンを持つ2つの粒子が，大きさ B で z 方向の静磁場中にあるとする．それぞれの粒子のスピン演算子を $\boldsymbol{S_1}, \boldsymbol{S_2}$ とし，全スピン演算子を $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{S_2}$ としたとき，この系のハミルトニアンが以下で与えられるとする．

$$H_S = -\mu B S_z$$

ここで μ は正の定数である．以下では，粒子1に対して $S_{1,z}$ の固有値が $\dfrac{\hbar}{2}$ の状態を $|\uparrow\rangle_1$，固有値が $-\dfrac{\hbar}{2}$ の状態を $|\downarrow\rangle_1$ と書くことにする．粒子2に対しても同様に $|\uparrow\rangle_2$，$|\downarrow\rangle_2$ を定義する．昇降演算子 $S_{k,\pm} = S_{k,x} \pm iS_{k,y}$ $(k = 1, 2)$ は次のように作用する．

$$S_{k,+}\,|\uparrow\rangle_k = 0, \quad S_{k,-}\,|\uparrow\rangle_k = \hbar\,|\downarrow\rangle_k\,, \quad S_{k,+}\,|\downarrow\rangle_k = \hbar\,|\uparrow\rangle_k\,, \quad S_{k,-}\,|\downarrow\rangle_k = 0$$

また，$\boldsymbol{S}^2$ の固有値が $\hbar^2 s(s+1)$ で，S_z の固有値が $\hbar m$ である規格化された同時固有状態を $|s, m\rangle$ と表す．全スピンの昇降演算子は $S_\pm = S_{1,\pm} + S_{2,\pm}$ となる．以下の問いに答えよ．

1) 全スピン演算子の固有状態 $|1, 1\rangle$ を $|\uparrow\rangle_k\,, |\downarrow\rangle_k$ $(k = 1, 2)$ を使って表せ．結果のみでよい．

2) 問1) の結果に S_- を作用させることにより，$|1, 0\rangle$ を $|\uparrow\rangle_k\,, |\downarrow\rangle_k$ $(k = 1, 2)$ を使って表せ．

3) $|0, 0\rangle$ を $|\uparrow\rangle_k\,, |\downarrow\rangle_k$ $(k = 1, 2)$ を使って表せ．

4) 時刻 t での状態は一般に

$$|\psi(t)\rangle = a(t)\,|1, 1\rangle + b(t)\,|1, 0\rangle + c(t)\,|1, -1\rangle + d(t)\,|0, 0\rangle$$

と表すことができる．初期時刻 $t = 0$ での状態が $|\psi(0)\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|1, 1\rangle + |1, 0\rangle\right)$ であるとき，時刻 t での状態 $|\psi(t)\rangle$ を求めよ．

5) 問4) で求めた状態 $|\psi(t)\rangle$ について，期待値 $\langle S_z\rangle$ を求めよ．

6) 問4) で求めた状態 $|\psi(t)\rangle$ について，期待値 $\langle S_x\rangle$ を求めよ．

7) 全スピン演算子 (S_x, S_y, S_z) の交換関係から，交換子 $[\boldsymbol{S}^2, S_x]$ を求めよ．

8) この系に対して，さらに x 軸方向の磁場を加える．このとき全ハミルトニアン H は $H = H_S + \epsilon S_x$ となる．ここで ϵ は実定数である．初期時刻 $t = 0$ での状態が $|\psi(0)\rangle = |1, 1\rangle$ であるとき，後の一般の時刻 t でゼロであるのは $b(t), c(t), d(t)$ のうちどれか．問7) で求めた交換関係にもとづいて定性的に述べよ．

令和６年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

物　理　学　専　攻

筆　記　試　験　問　題

熱・統計力学

解答には結果だけでなく，考え方や計算の経過を記すこと．(別に指示がある場合を除く.)

《令和５年８月２２日（火)》

問題5 (熱・統計力学)

[1] と [2] はそれぞれの解答用紙に解答せよ.

[1] 気液相平衡状態について考えてみよう. 内部エネルギーを U, 圧力を P, 体積を V, 温度を T, エントロピーを S, 化学ポテンシャルを μ, 物質量を n, 気体定数を R として以下の問いに答えよ.

1) a) ギブスの自由エネルギーは $G = U - TS + PV$ で与えられる. 内部エネルギーの微小変化 $dU = TdS - PdV + \mu dn$ を用いて dG を計算せよ.

   b) $G = \mu n$ の関係と問 1) a) の結果を用いて, $d\mu$ を計算せよ. 結果は, 1 mol あたりの体積 $v = V/n$, およびエントロピー $s = S/n$ を用いて表せ.

2) 問 1) b) の結果を用いて, P-T 平面における気体と液体の相平衡曲線が従うクラウジウス・クラペイロンの関係式, すなわち dP/dT と q, T, v_{G}, v_{L} の関係を表せ. ここで, $q = T(s_{\mathrm{G}} - s_{\mathrm{L}})$ は 1 mol の液体が気体へ変化するときの気化熱, s_{G}, s_{L}, および v_{G}, v_{L} はそれぞれ, 1 mol の気体 (G) と液体 (L) のエントロピー, および体積である.

3) 気体を理想気体とみなし, v_{G} が v_{L} よりはるかに大きいと仮定することで, 気化熱が T に依存しない場合の P の表式を求めよ. ただし, $T = T_0$ のとき $P = P_0$ であるものとし, $v_{\mathrm{G}} \gg v_{\mathrm{L}}$ より $v_{\mathrm{L}} = 0$ とみなしてよい. 結果は q, R, T, T_0, P_0 を用いて表せ.

4) 以下では粒子数が 1 mol で一定の場合を考える.

   a) 問 1) の dG を用いて, 下記のマクスウェルの関係式が成り立つことを示せ.

$$\left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P$$

   b) 問 4) a) の結果と定圧比熱 $C_P = T(\partial s/\partial T)_P$, および熱膨張係数 $\alpha = (1/v)(\partial v/\partial T)_P$ を用いて, ds が以下の式で表されることを導け.

$$ds = \frac{C_P}{T}dT - \alpha v dP$$

   c) これ以降, 気液相平衡曲線上において q が T に依存する場合を考える. 温度に対する気化熱の変化 dq/dT を計算せよ. 結果は q, T, および各相の定圧比熱 C_P^{G}, C_P^{L}, 熱膨張係数 α_{G}, α_{L}, 体積 v_{G}, v_{L} を用いて表せ.

   d) 問 4) c) の結果を用いて, 気体を理想気体とみなした場合の dq/dT を C_P^{G} と C_P^{L} を用いて表せ. ただし, 問 3) と同様に $v_{\mathrm{L}} = 0$ とみなしてよい.

[2] 金属を熱するとその表面から電子が放出される現象を考えてみよう．図 1(a) のように $z<0$ の領域に金属があり，xy 面を表面として外部と接している．以下では，金属中の電子は質量 m，スピン 1/2 の理想フェルミ気体として振る舞うとし，エネルギーの原点を金属中の電子の 1 粒子状態の最低エネルギーにとる．また，図 1(b) に示すように，金属表面から十分に離れた外部の位置エネルギーは $W\ (>0)$ とする．系の温度を T，金属の化学ポテンシャルを μ として以下の問いに答えよ．ただし，ボルツマン定数を k_{B}，プランク定数を h とする．

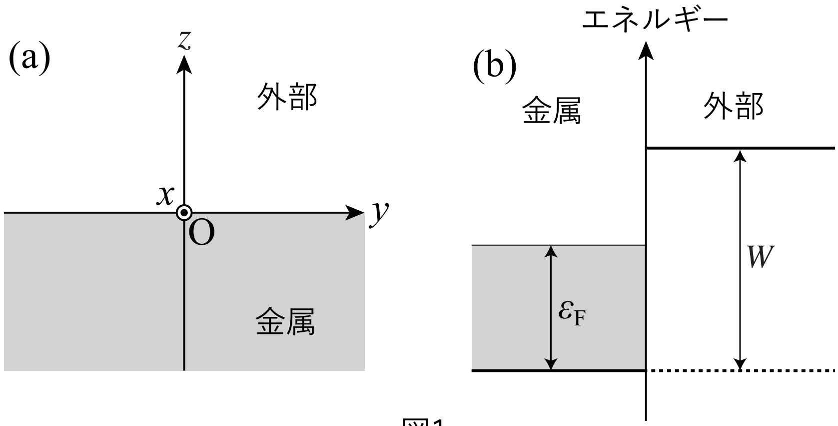


図1

1) 金属中の電子からなる系において，エネルギー ε を持つ 1 粒子状態の占有数はフェルミ・ディラック分布関数 $f(\varepsilon)=\dfrac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/(k_{\mathrm{B}}T)}+1}$ によって与えられる．絶対零度および有限温度のそれぞれの場合に対して，エネルギー ε の関数として，この分布関数の概形を重ねて描け．

2) 金属中の電子系を考える．エネルギー ε をもつ電子の単位体積あたりの状態密度は $D(\varepsilon)=4\pi(2m/h^2)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}$ と与えられる．ここで，$D(\varepsilon)$ にはすでにスピン自由度が考慮されているものとする．フェルミエネルギー ε_{F} を h, m および単位体積あたりの電子数 n を用いて表せ．

3) 絶対零度における金属中の電子系の単位体積あたりの内部エネルギーを，単位体積あたりの電子数 n とフェルミエネルギー ε_{F} を用いて表せ．

(次ページに続く)

4) ポテンシャル障壁 W を超えることができる電子が金属表面から放出される．金属から放出される単位時間，単位面積あたりの電子数 (電子放出率)R は

$$R = \frac{2}{h^3}\int_{-\infty}^{\infty} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{\sqrt{2mW}}^{\infty} dp_z \frac{p_z}{m}\ f\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right)$$

によって与えられる．これは，$\varepsilon_z = \dfrac{p_z^2}{2m}$ によって変数変換し，p_x と p_y に関する積分を 2 次元極座標で実行することで

$$R = \int_W^{\infty} g(\varepsilon_z) d\varepsilon_z, \qquad g(\varepsilon_z) = \frac{4\pi}{h^3}\int_0^{\infty} p\ f\left(\frac{p^2}{2m} + \varepsilon_z\right) dp$$

の形に変形できる．$g(\varepsilon_z)$ を求めよ．ここで，$\dfrac{d}{dx}\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)\right] = -\dfrac{1}{1+e^x}$ を用いてよい．

5) 仕事関数を $\phi = W - \varepsilon_{\mathrm{F}}\ (> 0)$ として導入する．十分低温で $k_{\mathrm{B}}T \ll \varepsilon_{\mathrm{F}}, W, \phi$ かつ $\mu \simeq \varepsilon_{\mathrm{F}}$ を満たすとき，ε_z に関する積分を実行することで，R を $k_{\mathrm{B}}, h, \phi, m, T$ を用いて表せ．

6) 金属表面に対して電場を印加したときの影響を考えてみよう．電場がない場合には，外部の領域に試験電荷をおくと金属表面に電荷が誘起されるため，この影響を考慮に入れると，金属表面から z だけ離れた電子の持つ位置エネルギーは $V_0(z) = W - \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{e^2}{4z}$ と仮定できる (図 2)．ここで，e は電気素量，ϵ_0 は外部の誘電率である．金属表面に対して z 軸負方向に大きさ E の電場を印加すると，電子の持つ位置エネルギーは $V(z) = W - \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{e^2}{4z} - eEz$ のように変化する．このとき，電場の印加によって生じる仕事関数の実効的な変化分を求めよ．この結果を用いて，電子放出率 R が電場の印加によって増加するか減少するかを理由と共に述べよ．

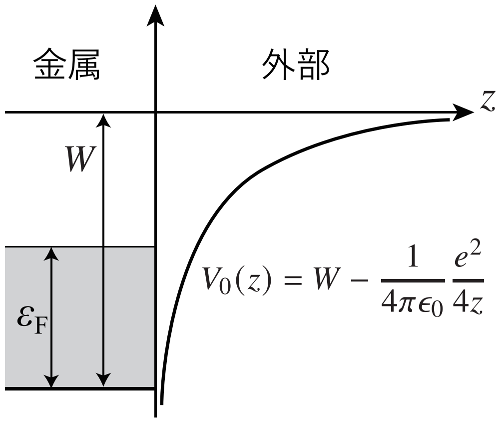


図2: 電場がないときの金属表面付近の位置エネルギー