令和５年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

物　理　学　専　攻

筆　記　試　験　問　題

基礎数学

解答には結果だけでなく，考え方や計算の経過を記すこと．（別に指示がある場合を除く．）

《令和４年８月２３日（火）》

問題1 (基礎数学)

[1], [2] と [3], [4] はそれぞれの解答用紙に解答せよ.

[1] 以下の行列 A を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

1) A の固有値 λ_1，λ_2 および対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ を求めよ．ただし，$\lambda_1 < \lambda_2$ とする.

2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とする．微分方程式 $\dfrac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = A\boldsymbol{x}$ について，初期条件 $x_1(0) = 1$，$x_2(0) = 3$，$\dfrac{dx_1}{dt}(0) = 0$，$\dfrac{dx_2}{dt}(0) = 0$ をみたす解 $x_1(t)$，$x_2(t)$ を，問 1) の結果を用いて求めよ.

[2] $f(x) = |x|$ $(-\pi \leq x < \pi)$ で定まる周期 2π の周期関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\}$$

のように表すことを考える．ただし，a_0 および a_n，b_n $(n = 1, 2, 3, ...)$ は定数とする.

1) 区間 $-\pi \leq x < \pi$ における $f(x)$ を含む積分として，a_0 および a_n，b_n $(n = 1, 2, 3, ...)$ を表せ．(答のみでよい．)

2) a_0 および a_n，b_n $(n = 1, 2, 3, ...)$ を求めよ.

3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$ を考えることにより，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ を求めよ.

[3] 2 変数関数 $u(x,t)$ に関する偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 \le x \le L, \quad 0 \le t. \quad \text{ただし，} L \text{ は正の実数．})$$

について，以下の問いに答えよ．

1) $u(x,t) = X(x)T(t)$ と変数分離することにより，次の境界条件を満たす解を求めよ．

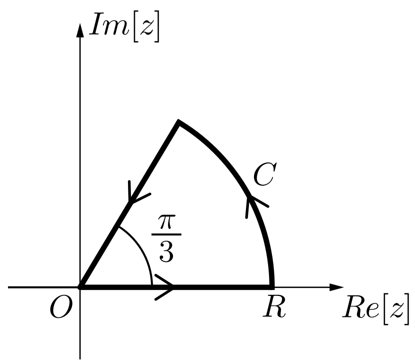
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

2) 問 1) の境界条件に加えて，次の初期条件を満たす解を求めよ．

$$u(x,0) = \sin^2 \frac{\pi x}{L}$$

[4] 複素関数の積分 $\oint_C \frac{1}{z^6+1} dz$ を用いて，以下の積分 I の値を求めよ．ただし，C は複素平面上で図に示すような扇形の積分経路である．結果は，虚数単位 i を含まない形で表せ．

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{x^6+1} dx$$



令和５年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

物　理　学　専　攻

筆　記　試　験　問　題

力学

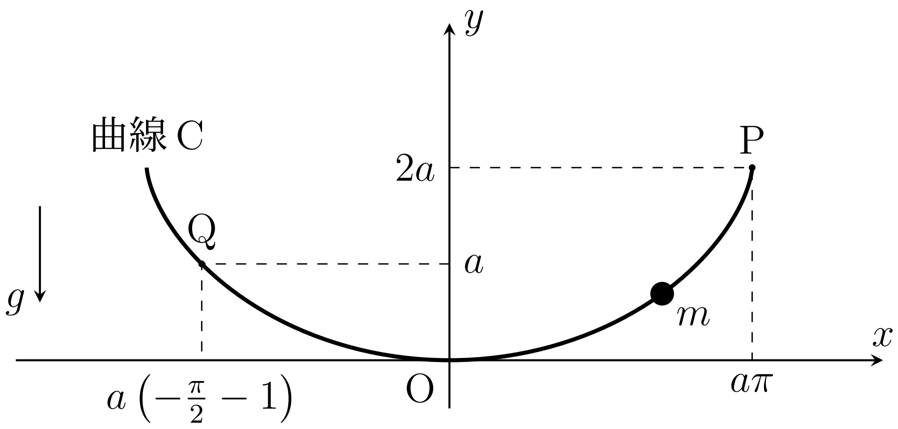
解答には結果だけでなく，考え方や計算の経過を記すこと．(別に指示がある場合を除く.)

《令和４年８月２３日（火)》

問題 2 (力学)

[1] と [2] はそれぞれの解答用紙に解答せよ.

[1] 図のように，$x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ $\left(-\pi \leq \theta \leq \pi,\ a\text{は正の定数}\right)$ で表される曲線 C に沿って，なめらかに運動する質量 m の質点を考える．時刻 t における質点の位置は $\theta = \theta(t)$ で表されるものとし，質点に対して y 軸の負の向きに重力がはたらくとして，以下の問いに答えよ．ただし，重力加速度の大きさを g とする．



1) 質点の運動エネルギー K が，$K = ma^2\dot{\theta}^2(1 + \cos\theta)$ と書けることを示せ．

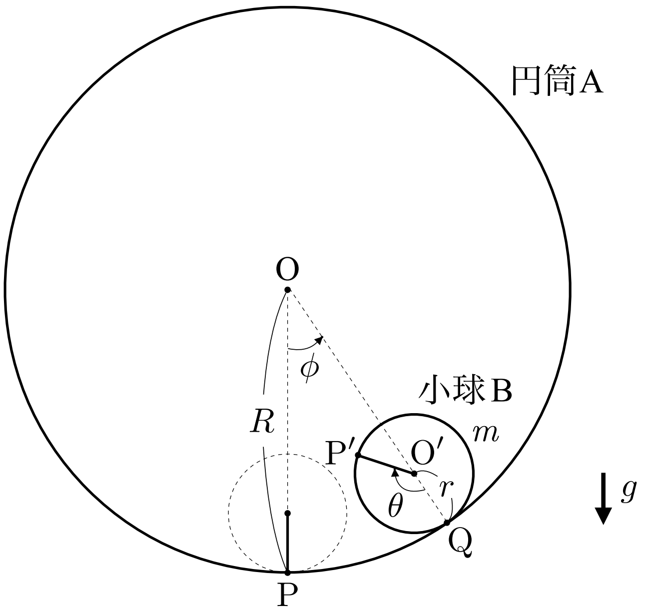
2) $s = 4a\sin\dfrac{\theta}{2}$ とするとき，$|s|$ が原点 O から質点までの曲線 C に沿った長さとなることを示せ．

3) 質点のラグランジアン L を，問 2) で定義した s，および $\dot{s}$, m, g, a を用いて表せ．

4) 問 2) で定義した s に関する運動方程式を求め，その一般解 $s(t)$ を与えよ．

5) 時刻 $t = 0$ に，質量 m の質点 1, 2 をそれぞれ図に示す曲線 C 上の点 P, Q から，同時にしずかにはなしたところ，質点 1, 2 は曲線 C 上のある点で衝突した．衝突した点の座標を求めよ．

[2] 図のように，半径 R の中空円筒 A が，中心軸を水平にして固定しておかれている．密度が一様な剛体小球 B（質量 m，半径 r）が円筒 A の内面に接して，すべることなく運動する場合について考える．ただし小球 B は，円筒 A の中心軸に垂直な平面内で運動するものとする．円筒 A の最下点 P で円筒 A に接する小球 B 上の点は，小球 B が点 Q で円筒 A に接しているとき，点 P′ に移動している．このとき，円筒 A の最下点 P を基準として，小球 B の中心 O′ の振れ角 ∠POO′ を ϕ，回転角 ∠QO′P′ を θ とすると，静止系から見た小球 B の回転角は $\chi = \theta - \phi$ と表される．小球 B が円筒 A から受ける摩擦力の大きさを f，重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えよ．ただし，小球 B の重心を通る回転軸のまわりの慣性モーメントは，$\dfrac{2}{5}mr^2$ で与えられる．



1) 小球 B の重心運動に関する運動方程式（ϕ に関する微分方程式）を書け．解答は結果のみ示せばよい．

2) 小球 B の回転運動に関する運動方程式（χ に関する微分方程式）を書け．解答は結果のみ示せばよい．

小球 B を $\phi = \phi_0$（$0 < \phi_0 < \pi/2$）となる位置におき，しずかにはなすと，$-\phi_0 \leq \phi \leq \phi_0$ において，円筒 A の内面をすべることなく往復運動した．

3) はじめに，ϕ_0 が微小である場合を考える．小球 B の往復運動の周期を R, r, m, g のうち，必要なものを用いて表せ．

4) 次に，ϕ_0 が微小でない場合を考える．

   a) $\phi = 0$ における小球 B の重心の速さ v_1 を求めよ．

   b) 小球 B がすべることなく運動を始めるためには，ϕ_0 がある値 α 以下でなければならない．小球 B と円筒 A の間の静止摩擦係数を μ としたとき，$\tan\alpha$ を求めよ．

令和５年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

物　理　学　専　攻

筆　記　試　験　問　題

電磁気学

解答には結果だけでなく，考え方や計算の経過を記すこと．(別に指示がある場合を除く．)

《令和４年８月２３日（火)》

問題 3 (電磁気学)

[1] と [2] はそれぞれの解答用紙に解答せよ.

[1] 図 1 のように,電荷 $Q(>0)$ が半径 R の球内に一様に分布している帯電球を考える.帯電球の中心は原点 O に固定されている.原点 O からの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$,原点 O からの距離を $r=|\boldsymbol{r}|$,真空の誘電率を ε_0 とするとき,以下の問いに答えよ.

1) 帯電球の内側 $(r \leq R)$ と外側 $(r > R)$ の位置 $\boldsymbol{r}$ における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ をそれぞれ求めよ.

2) 帯電球の内側 $(r \leq R)$ と外側 $(r > R)$ の静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ をそれぞれ求めよ.ただし,無限遠で $\phi \to 0$ とする.

上記の帯電球の中心に点電荷 $-Q$ を配置し,外部から一様な電場 $\boldsymbol{E}_0=(-E_0,0,0)$ を印加したところ,図 2 のように,点電荷 $-Q$ は位置 $\boldsymbol{d}=(d,0,0)$ でつりあった.ここで,$E_0>0$, $0<d<R$ とする.外部電場および点電荷 $-Q$ により帯電球の電荷分布は変化しないものとして,以下の問いに答えよ.

3) 原点 O から点電荷 $-Q$ までの距離 d を,E_0, Q, ε_0, R を用いて表せ.

4) 帯電球の外側の位置 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$(ただし $r \gg d$) での,帯電球と点電荷 $-Q$ がつくる静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ を d の 1 次の項まで求めよ.ただし,無限遠で $\phi \to 0$ とする.

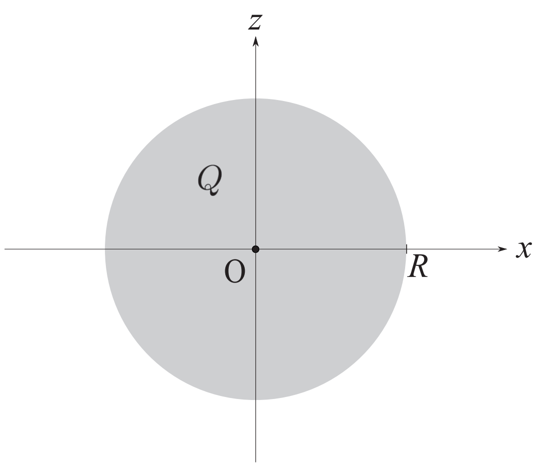


図 1

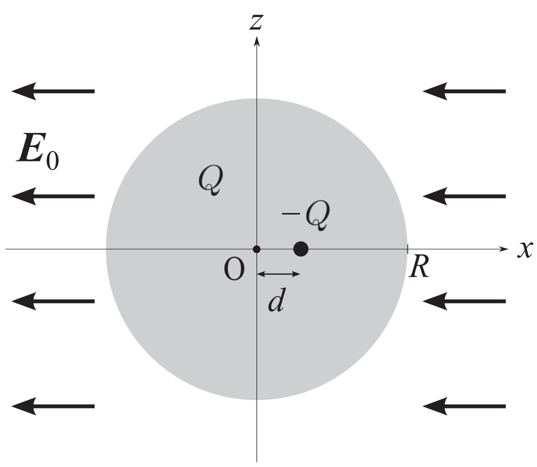


図 2

(次ページに続く)

次に，図3のように外部電場をゼロにして，帯電球のまわりに原点Oを中心とする厚さの無視できる導体球殻を設置した．導体球殻の全電荷はゼロであり，導体球殻により帯電球の電荷分布は変化しないものとする．

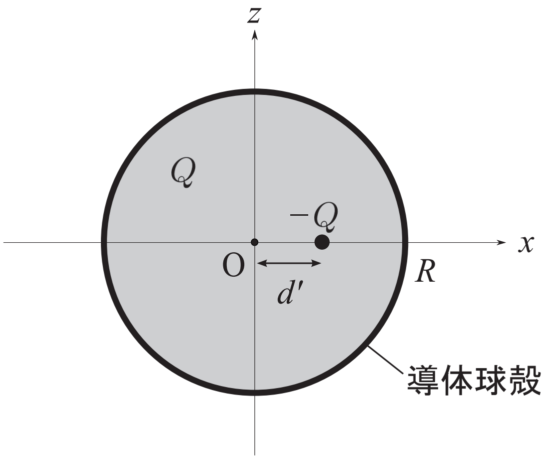


図 3

5) 点電荷 $-Q$ を点 $(d', 0, 0)$ に固定したとき，導体球殻の外側の位置 $\boldsymbol{r} = (r, 0, 0)$ における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求め，その理由を説明せよ．ここで，$0 < d' < R$，$r > R$ とする．

[2] 真空中の透磁率を μ_0 として，電流がつくる磁場に関する，以下の問いに答えよ．

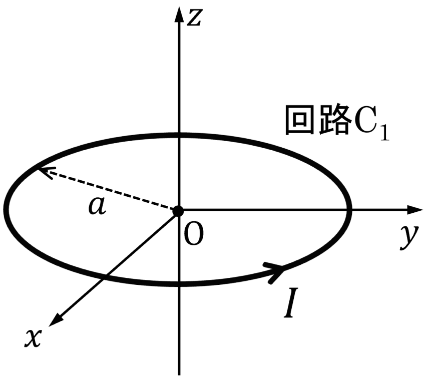


図 1

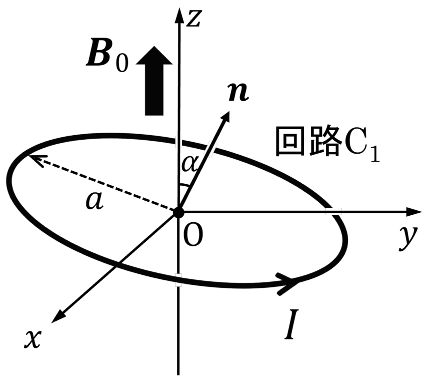


図 2

1) 図 1 のように，z 軸を中心軸とする xy 平面にある半径 a の円形回路 C_1 に，一定の電流 I（向きは z 軸の正の方向から見て反時計回り）が流れている．回路 C_1 に流れる電流 I が z 軸上につくる磁束密度 $\boldsymbol{B}(0,0,z)$ を求めよ．

2) 図 2 のように，一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}_0=(0,0,B_0)$ の中で，回路 C_1 を x 軸のまわりに角度 α だけ回転させた．このとき，回路 C_1 を含む平面の単位法線ベクトルは $\boldsymbol{n}=(0,\sin\alpha,\cos\alpha)$ である．回路 C_1 には，一定の電流 I（向きは $\boldsymbol{n}$ に沿って進む右ねじの回転する向き）が流れている．

a) 回路 C_1 が，磁束密度 $\boldsymbol{B}_0$ から受ける力 $\boldsymbol{F}$ を求めよ．

b) 回路 C_1 に沿った積分を行うことにより，回路 C_1 が磁束密度 $\boldsymbol{B}_0$ から受ける原点 O のまわりのトルク $\boldsymbol{N}$ を求めよ．

（次ページに続く）

電流 I が流れている回路 C_1 は，磁気双極子モーメント $\boldsymbol{m} = \pi a^2 I \boldsymbol{n}$ をもつ磁気双極子とみなすことができる．ここで，$\boldsymbol{n}$ は図 3 のような回路 C_1 を含む平面の単位法線ベクトルである．原点 O に置かれた磁気双極子モーメント $\boldsymbol{m}$ をもつ磁気双極子が，位置 $\boldsymbol{r}$ につくる磁束密度 $\boldsymbol{B}_d(\boldsymbol{r})$ が次式で与えられることを用いて，以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{B}_d(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[\frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^2} - \boldsymbol{m}\right]$$

3) 図 3 のように，半径 a の回路 C_1 と半径 b の回路 C_2 が設置されている．回路 C_1 は，中心が原点 O に位置し，単位法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = (0, \sin\alpha, \cos\alpha)$ となるようにおかれている．回路 C_1 には，一定の電流 I（向きは $\boldsymbol{n}$ に沿って進む右ねじの回転する向き）が流れている．回路 C_2 は，中心が $(0, 0, d)$ に位置し，xy 平面に平行である．回路 C_2 には電流は流れていない．ここで，$a \ll b, d$ とする．

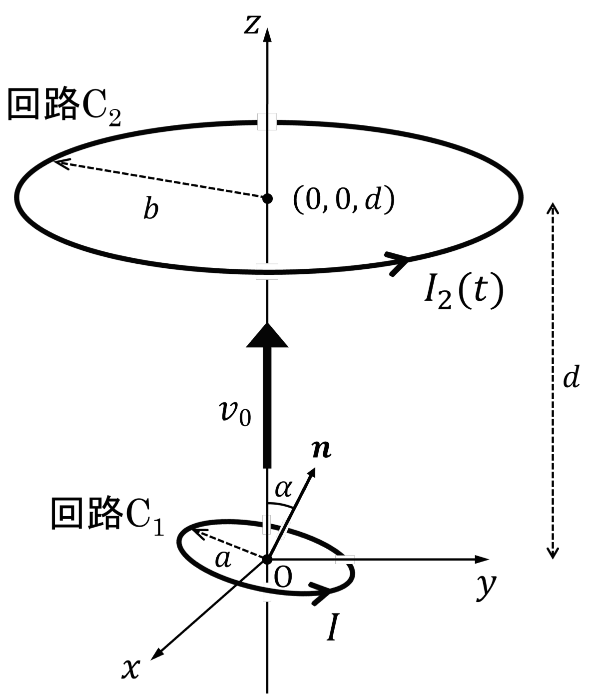


図 3

a) 回路 C_2 を境界とする面を貫く磁束 Φ_2 を求めよ．

b) 回路 C_1 を，角度 α を保ったまま，z 軸の正の向きに一定速度 v_0 で移動させた場合を考える．時刻 t における，回路 C_2 に流れる電流 $I_2(t)$ を求めよ．ただし，回路 C_1 の中心が原点 O を通過する時刻を $t = 0$ とし，電流 $I_2(t)$ の向きは z 軸の正の方向から見て反時計回りを正とする．また，回路 C_2 の電気抵抗を R とし，自己インダクタンスは無視できるものとする．

令和５年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

物　理　学　専　攻

筆　記　試　験　問　題

量子力学

解答には結果だけでなく，考え方や計算の経過を記すこと．(別に指示がある場合を除く.)

《令和４年８月２３日（火)》

問題4 (量子力学)

[1] と [2] はそれぞれの解答用紙に解答せよ.

以下では Planck 定数を 2π で割ったものを $\hbar$ とする.

[1] 1次元ポテンシャル中を運動する質量 m の粒子を考える. この粒子のハミルトニアンは次のように記述される.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

ここで x は位置演算子, p は運動量演算子で$p = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$ であり, ω を正の定数とする.

互いにエルミート共役な演算子 a, $a^\dagger$ を以下のように定義する.

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right), \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right)$$

また, 必要であれば以下の公式を用いてよい.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-A\xi^2)d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \quad (A \text{ は正の定数})$$

この系の基底状態と第一励起状態の規格化された波動関数をそれぞれ $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ とする. このとき以下の問いに答えよ.

1) a, $a^\dagger$ の交換子 $[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a$ を求めよ.

2) ハミルトニアン H を演算子 a, $a^\dagger$ を用いて表せ.

3) $\varphi_0(x)$ は $a\varphi_0(x) = 0$ を満たす. $\varphi_0(x)$ のエネルギー固有値 E_0 を求めよ.

4) 規格化されていることに注意して, $\varphi_0(x)$ を求めよ. ただし位相は $\varphi_0(0) > 0$ となるように選べ.

5) $\varphi_1(x)$ は C を正の定数として $\varphi_1(x) = Ca^\dagger\varphi_0(x)$ とかける. このとき C を求め, 第一励起状態における粒子の確率密度の概形をグラフに図示せよ. (ただし軸上に数値を書く必要はない.)

6) 時間 t に依存する波動関数 $\psi(x,t)$ を考える. $\psi(x,t)$ が $t = 0$ において $\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_0(x) + \varphi_1(x)]$ を満たすとき, $\psi(x,t)$ を $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ を用いて表せ.

7) 問 6) の波動関数 $\psi(x,t)$ で表される状態について, 期待値 $\langle x\rangle$ を求めよ.

[2] 中心力ポテンシャル中の粒子に関する以下の問いに答えよ．

1) 中心力ポテンシャル $V(r)$ の中の粒子（質量 μ）を考える．粒子の位置を $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ で表し，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする．ハミルトニアンは運動量ベクトル $\boldsymbol{p}=(p_x,p_y,p_z)$ を用いて次の式で与えられる．

$$H=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu}+V(r)$$

p_x は座標 x に共役な運動量演算子で，$p_x=-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$ と表される．p_y,p_z についても同様である．中心力ポテンシャルは a を正の定数として次の形とする．

$$V(r)=\begin{cases}0 & (r\le a)\\ \infty & (r>a)\end{cases} \tag{1}$$

極座標を $(x,y,z)=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ とする．極座標表示でのラプラシアンは次のように与えられる．

$$\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

以下では球面調和関数 $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$（$\ell$ は 0 以上の整数，m は $-\ell\le m\le\ell$ を満たす整数）が次の式を満たすことを用いてよい．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}^2Y_{\ell m}(\theta,\varphi)&=\hbar^2\ell(\ell+1)Y_{\ell m}(\theta,\varphi)\\ L_zY_{\ell m}(\theta,\varphi)&=\hbar mY_{\ell m}(\theta,\varphi)\end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{L}=(L_x,L_y,L_z)=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ は角運動量演算子であり，次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}^2&=-\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\\ L_z&=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\end{aligned}$$

このとき以下の問いに答えよ．

a) エネルギー固有状態の波動関数を $\Phi(r,\theta,\varphi)=\dfrac{\chi_\ell(r)}{r}Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ と表す．エネルギー固有値を E として，$\chi_\ell(r)$ が満たす微分方程式を導け．

b) $(\ell,m)=(0,0)$ の状態について，問 1)a) で求めた微分方程式を解き，最低エネルギー状態のエネルギー固有値を求めよ．その際，原点での境界条件に留意せよ．

（次ページに続く）

2) 次に，式 (1) で与えられる中心力ポテンシャル中の荷電粒子に対して，z 軸方向に一様な静磁場 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ を加えた場合を考える．荷電粒子の電荷を e として，この系のハミルトニアンは次の式で与えられる．

$$H = \frac{(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2}{2\mu} + V(r)$$

ここでベクトルポテンシャルは $\boldsymbol{A} = (-yB/2, xB/2, 0)$ とする．加えた磁場は十分弱いとして，B の１次の範囲で以下の問いに答えよ．

a) 磁場を加える前の $(\ell, m) = (1, 1), (1, 0), (1, -1)$ のそれぞれの状態に対して，磁場を加えたことによるエネルギーの変化 ΔE_m を求めよ．

b) 磁場を加えたことにより問 2)a) のようなエネルギーの変化が生じる理由を，H と $\boldsymbol{L}$ の交換関係に基づいて説明せよ．

令和５年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

物　理　学　専　攻

筆　記　試　験　問　題

熱・統計力学

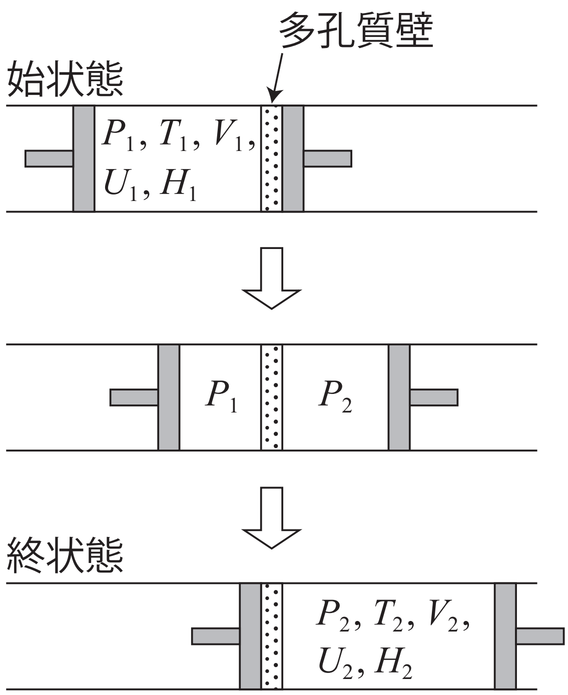
解答には結果だけでなく，考え方や計算の経過を記すこと．（別に指示がある場合を除く．）

《令和４年８月２３日（火）》

問題 5 (熱・統計力学)

[1] と [2] はそれぞれの解答用紙に解答せよ.

[1] 図に示すように，固定された多孔質壁で仕切られたシリンダーに気体が入っている．多孔質壁には小さな穴が多数開いていて気体が通り抜けられる．左右のピストンにそれぞれ一定の力を加えて，気体を多孔質壁の左側から右側に押し出す Joule-Thomson 過程を考える．左右におけるシリンダー内部の気体の圧力は，それぞれ P_1，P_2 (ただし，$P_1 > P_2$) で一定に保たれているものとする．ここで，ピストンはなめらかに動き，ピストンやシリンダーは熱を通さないとする．始状態，終状態における気体の圧力，温度，体積，内部エネルギー，エンタルピーを，それぞれ P_1，T_1，V_1，U_1，H_1 および P_2，T_2，V_2，U_2，H_2 として，以下の問いに答えよ．



1) 始状態と終状態の内部エネルギーの差 $\Delta U = U_2 - U_1$ を，P_1，V_1，P_2，V_2 を用いて表せ.

2) 問 1) の結果を用いて，Joule-Thomson 過程が等エンタルピー過程 ($H_1 = H_2$) であることを示せ．ここで，気体の圧力，体積，内部エネルギーをそれぞれ P，V，U とするとき，エンタルピーは $H = U + PV$ と定義される.

3) a) 気体のエントロピーを S，温度を T とするとき，Gibbs の自由エネルギー $G(T, P)$ の全微分が $dG = -SdT + VdP$ と与えられることを用いて，Maxwell の関係式

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

を示せ.

b) 定圧熱容量 $C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$ と問 3)a) の関係式を用いて，次式を示せ.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{1}{C_P}\left\{T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - V\right\}$$

4) 状態方程式 $\left(P + a/V^2\right)(V - b) = RT$ に従う 1 mol の van der Waals 気体について，Joule-Thomson 過程を考える．ここで，R は気体定数，a および b は正の定数である．以下では，この状態方程式が，

$$V = \frac{RT}{P} + b - \frac{a}{RT} + \frac{abP}{(RT)^2}$$

と近似される場合を考える．

a) Joule-Thomson 係数 μ_{JT} を $\mu_{\mathrm{JT}} = \left(\dfrac{\partial T}{\partial P}\right)_H$ によって定義する．μ_{JT} を求めよ．ただし，定圧熱容量を $C_P = \dfrac{5}{2}R$ とせよ．

b) $\Delta P = P_2 - P_1$ が十分に小さいとする．Joule-Thomson 過程の前後で温度変化が生じないときの温度を T_0 としたとき，圧力 P_1 を T_0, a, b, R を用いて表せ．

c) 問 4)b) の結果を用いて，Joule-Thomson 過程で気体が冷却される領域を，温度 T_1 を横軸，圧力 P_1 を縦軸とするグラフに図示せよ．

[2] 質量 m の粒子からなる古典理想気体を考える．粒子の運動量とエネルギーをそれぞれ $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$ と $\varepsilon(\boldsymbol{p})$ と表すとき，体積 V，温度 T における一粒子の分配関数は，

$$z = \frac{V}{h^3} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dp_z e^{-\frac{\varepsilon(\boldsymbol{p})}{k_{\mathrm{B}} T}}$$

で与えられる．一粒子エネルギーが $\varepsilon(\boldsymbol{p}) = \dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m}$ と与えられる場合に，以下の問いに答えよ．ただし，Boltzmann 定数を k_{B}，Planck 定数を h とする．

1) 一粒子の分配関数 z を計算せよ．ここで，公式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ (α は正の定数) を用いてよい．

2) 温度 T の熱浴および化学ポテンシャル μ の粒子浴と接して平衡状態にある体積 V の古典理想気体を，大正準集合を用いて考える．このとき，大分配関数 Ξ は，一粒子の分配関数 z を用いて，

$$\Xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n e^{\frac{\mu n}{k_{\mathrm{B}} T}}$$

と表される．グランドポテンシャル $\Omega = U - TS - \mu N$ は，$\Omega(T, V, \mu) = -k_{\mathrm{B}} T \ln \Xi$ で与えられる．ここで，U，S，N は系の内部エネルギー，エントロピー，平均粒子数である．

   a) グランドポテンシャル $\Omega(T, V, \mu)$ を求めよ．

   b) 圧力 P を求めよ．

次に，古典理想気体が底面積 A で高さ無限大の円筒 (中心軸は鉛直方向) に封入されているとして，粒子にはたらく一様な重力の影響を考える．この円筒は温度 T の熱浴に接していて気体は平衡状態にある．位置エネルギーの原点を円筒の下端に取ると，高さ y にある粒子にはたらく重力による位置エネルギーは，重力加速度の大きさを g として $u(y) = mgy$ である．円筒中の区間 $[y, y + \Delta y]$ (Δy は微小量) に含まれる薄い円柱状の領域 Λ を考える．領域 Λ に含まれる気体の圧力および粒子数密度は高さ y に依存するが，化学ポテンシャル μ は高さに依存せず円筒内で一定である．以下の問いに答えよ．

3) 領域 Λ に含まれる気体の一粒子の分配関数 $z(y)$ を求めよ．

4) 領域 Λ に含まれる気体の圧力 $P(y)$ を求めよ．

5) 領域 Λ に含まれる気体の粒子数密度を $\rho(y)$ としたとき，$\rho(y)/\rho(0)$ を求めよ．

6) 円筒に含まれる気体の一粒子あたりの位置エネルギーの平均値 $\bar{u}$ を求めよ．