令和４年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

物　理　学　専　攻

筆　記　試　験　問　題

《令和３年８月２３日（月）》

問題1 (基礎数学)

[**1**], [**2**] と [**3**], [**4**] はそれぞれの解答用紙に解答せよ.

[1] 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = xe^{3x}$$

を考える.

1) $y = (ax + b)e^{3x}$ が解となるように，定数 a および b を定めよ.

2) 問 1) の結果を用いて，一般解を求めよ.

[2] 次の行列 A を考える.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 2 \end{bmatrix}$$

1) A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ および対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ を求めよ.

2) 原点を中心とする半径 1 の球 $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ を，行列 $A^n(n = 1, 2, \cdots)$ で表される一次変換によって変換した図形を V_n とする．$n \to \infty$ の極限で V_n はどのような図形になるか，理由とともに答えよ.

[3] $z = e^{i\theta}$（i は虚数単位）とおくことにより，以下の積分 I を複素積分に書き換え，I の値を求めよ．

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 4\cos\theta} d\theta$$

[4] 3 次元空間内の次のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ とベクトル場 $\boldsymbol{G}$ を考える．

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (y, x - z, 2yz)$$

$$\boldsymbol{G}(x, y, z) = (0, -z, 2yz - z)$$

1) ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ について，以下の曲面 S 上での面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS$ の値を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の単位法線ベクトルであり，$\boldsymbol{n}$ の向きは z 成分が正となるようにとる．また，a は正の定数とする．

$$S = \left\{(s, t, a^2 - s^2 - t^2) \mid 0 \le s \le a, 0 \le t \le a\right\}$$

2) ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ とベクトル場 $\boldsymbol{G}$ から次のベクトル場 $\boldsymbol{J}$ を作る．

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{F} + k\boldsymbol{G}$$

ただし，k は定数である．

a) ベクトル場 $\boldsymbol{J}$ について

$$\boldsymbol{J} = \nabla\phi$$

を満たす関数 $\phi(x, y, z)$ が存在するときの k の値を求めよ．

b) 問 a) の関数 $\phi(x, y, z)$ は

$$\phi(x, y, z) = \int_C \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r'}) \cdot d\boldsymbol{r'}$$

と表される．ここで，積分路 C は $C = \{\boldsymbol{r'} = (ux, uy, uz) \mid 0 \le u \le 1\}$ である．線積分を具体的に実行することにより，関数 $\phi(x, y, z)$ を求めよ．

問題 2 (力学)

[1] 水平面 DE と，水平面と角度 ϕ $(0 < \phi < \pi/2)$ をなす斜面 AC, FG が，図 1 のようになめらかにつながっている．質量 M，半径 R の密度が一様な球を点 A におき，しずかに離した．点 A から点 B の間では，球は斜面から摩擦力を受け，すべることなく運動する．それ以外の場所では，摩擦ははたらかないものとする．球が点 A と点 B にあるときの水平面から球の重心までの高さを，それぞれ $h_\mathrm{A}, h_\mathrm{B}$ とする．回転軸が重心を通るときの球の慣性モーメントを I，重力加速度の大きさを g とするとき，以下の問いに答えよ．

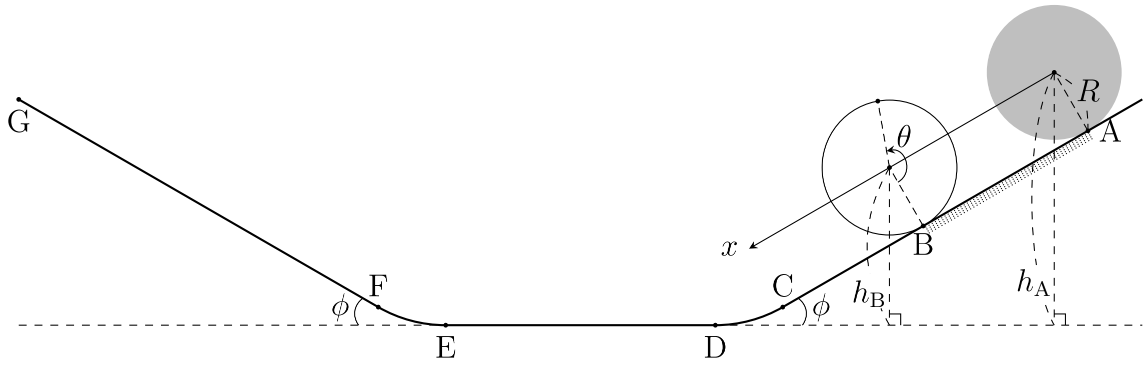


図 1

1) 図 1 のように，斜面を下る方向に x 軸をとり，球の重心の位置を x として，点 A から点 B までの球の運動を考える．点 A から点 B の間で球が受ける摩擦力の大きさを f，回転軸まわりの球の回転角を θ とする．

   a) 球の重心運動 (x) に関する運動方程式を書け．

   b) 球の回転運動 (θ) に関する運動方程式を書け．

   c) 球の重心の加速度 $\ddot{x}$ を，M, R, I, g, ϕ のうち，必要なものを用いて書け．

2) 球は，点 B を通過した後，水平面 DE を経て，斜面 FG 上の最高点 H_1 に到達した．点 H_1 における，球の重心の水平面からの高さ h_1 を求めよ．

3) 球を，質量 M，半径 R で厚さが薄い一様な球殻におきかえる．球殻は，球と同様，点 A から点 B まではすべることなく運動し，それ以外の部分では摩擦を受けずに運動する．球殻を点 A におき，しずかに離すと，水平面 DE を経て，斜面 FG 上の最高点 H_2 に到達した．点 H_2 における，球殻の重心の水平面からの高さを h_2 とするとき，h_1 と h_2 の大小関係を理由とともに書け．ただし，理由を記述する際，球や球殻の慣性モーメントを具体的に求めなくても良い．

[2] 図2のように，水平な天井に等間隔 l で一直線上に並んだ3点A, B, C にそれぞれ長さ l の棒を設置し，棒の先端に，質量 m の小さなおもり1，おもり2，おもり3をそれぞれとりつけた．おもり1とおもり2の間，および，おもり2とおもり3の間を，自然長 l，ばね定数 k のばねで接続する．棒はたわむことはなく，直線ACを含む鉛直面内を振れるようになっている．3点A, B, C に取り付けた棒の角度を，鉛直下向きの方向から反時計回りに，それぞれ $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ とし，これらが微小な場合 ($|\theta_1|$, $|\theta_2|$, $|\theta_3| \ll 1$) のおもりの運動を考える．棒とばねの質量は無視できるものとし，ばねはたるむことなく，ばねの両端のおもりを結ぶ直線上でのび縮みするものと考えてよい．重力加速度の大きさを g とするとき，以下の問いに答えよ．

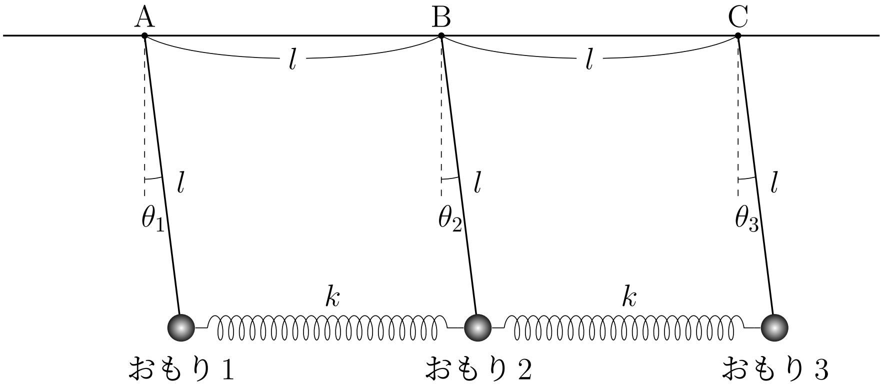


図2

1) おもり1とおもり2の間のばねのポテンシャルエネルギーを U_{12} とする．ばねの長さを θ_1, θ_2 の1次までで近似するとき，$U_{12} = \dfrac{1}{2}kl^2(\theta_1 - \theta_2)^2$ となることを示せ．

2) 問1) の結果を用いて，この系全体のラグランジアン L を書け．ただし，$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ の2次までで近似せよ．

3) 問2) の結果を用いて，おもり1，おもり2，おもり3 に対する運動方程式を導出せよ．

以下では，$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ とおき，$k = m\omega^2$ の場合を考える．

4) 問3) の運動方程式の一般解は，基準振動数 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ($0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3$) と，時間に依存しない3つのベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を使って，以下の式のように記述することができる．ただし，A_n, B_n は任意の定数である．

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{3} (A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t)\,\boldsymbol{e}_n$$

a) 基準振動数 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ を，ω を使って表せ．

b) ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を求めよ．

5) おもり2に対して，水平方向に振動する外力 $f\sin\omega_f t$ (f, ω_f は正の定数) を加えると，ω_f がある値をとるとき共鳴が観測される．共鳴が観測される ω_f をすべて求め，その理由を説明せよ．

問題3 (電磁気学)
[1] と [2] はそれぞれの解答用紙に解答せよ.

[1] 真空の誘電率を ε_0 として以下の問いに答えよ.

1) 図1のように，原点Oから距離が $d/2$ 離れた x 軸上の点 $\mathrm{D}_1(d/2,0,0)$ と点 $\mathrm{D}_2(-d/2,0,0)$ (d は正の定数) に，点電荷 $+q$, $-q$ をそれぞれ配置した．xy 平面上の点Rの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とし，$\boldsymbol{r}$ と x 軸のなす角を θ とする．点Rでの静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ を $\varepsilon_0, q, d, \theta, r$(ただし $r=|\boldsymbol{r}|$) の中から必要なものを使って表せ．無限遠方での静電ポテンシャルを0とし，$r \gg d$ の場合の d/r についての1次の近似式で書くこと．近似には次の式を用いてもよい.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1+\frac{1}{2}x \quad (\text{ただし } |x| \ll 1)$$

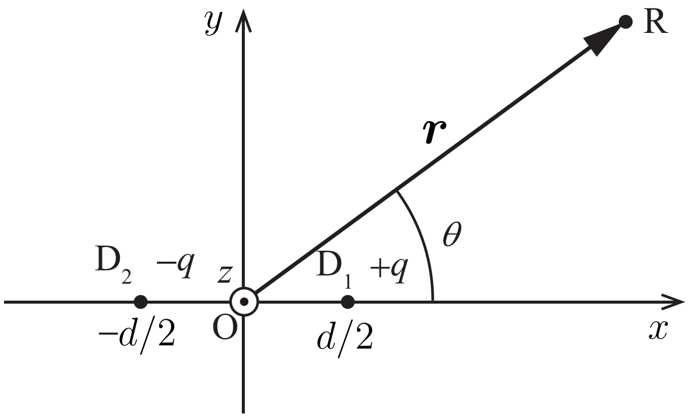


図1

2) $r \gg d$ として，問1) の点電荷 $+q$ と $-q$ を，電気双極子モーメントが $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{d}$ である電気双極子とみなす．ここで $\boldsymbol{d}=\overrightarrow{\mathrm{D_2D_1}}$ である．点Rにおける電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を，$\varepsilon_0, r, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}$ の中から必要なものを使って表せ.

3) 問2) の電気双極子に外部から電場をかける．原点Oにおける外部電場を $\boldsymbol{E}_0$ とするとき，電気双極子の静電エネルギーが次式で与えられることを示せ.

$$U=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_0$$

（次ページに続く）

4) 図 2 のように電気双極子モーメントが $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$ の電気双極子を，それぞれ原点と点 B $(b, 0, 0)$ に置いた．$\boldsymbol{p}_1$ のもつ静電エネルギー U を $\varepsilon_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, b, \boldsymbol{b}$ の中から必要なものを使って表せ．ただし $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である．

図 2

5) 次に問 4) の $\boldsymbol{p}_2$ を取り除き，接地した無限平面導体板を図 3 のように導体面が $x = L$ となるように置いた．図のように $\boldsymbol{p}_1$ と x 軸のなす角を α としたとき，$\boldsymbol{p}_1$ のもつ静電エネルギー U を求め，U が最小になる α の値をすべて答えよ．ただし，$0 \leq \alpha < 2\pi$ とする．

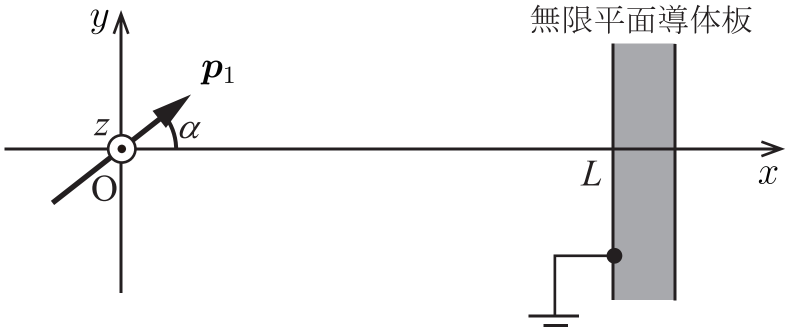
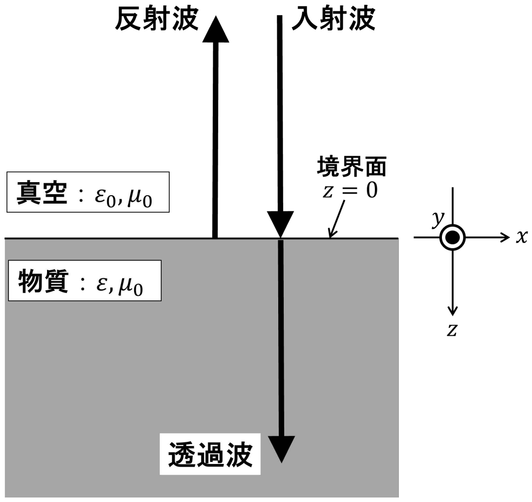


図 3

[2] 右図のように z 軸を下向きにとり，$z \geq 0$ の領域には誘電率が ε の物質がある．$z < 0$ の領域は真空であり，誘電率と透磁率はそれぞれ ε_0, μ_0 である．また，物質の透磁率は真空の透磁率と同じ μ_0 とする．



いま，電磁波が z 軸の負の方向から正の方向に向かって，真空と物質の境界面 $(z = 0)$ に対して垂直に入射する場合を考える．電磁波の一部は境界面で反射し，残りは物質中に侵入する（透過する）．ただし，真空中および物質中とそれらの境界面には自由電荷，電流はないものとする．

入射波，反射波，透過波の電場はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{r}, t) &= \boldsymbol{E}_{0\mathrm{I}} \exp\{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)\}, \\
\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{r}, t) &= \boldsymbol{E}_{0\mathrm{R}} \exp\{i(-\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)\}, \\
\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}, t) &= \boldsymbol{E}_{0\mathrm{T}} \exp\{i(\boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{r} - \omega' t)\},
\end{aligned}
$$

磁束密度はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{r}, t) &= \boldsymbol{B}_{0\mathrm{I}} \exp\{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)\}, \\
\boldsymbol{B}_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{r}, t) &= \boldsymbol{B}_{0\mathrm{R}} \exp\{i(-\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)\}, \\
\boldsymbol{B}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}, t) &= \boldsymbol{B}_{0\mathrm{T}} \exp\{i(\boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{r} - \omega' t)\}
\end{aligned}
$$

の実部で表すことができる．ここで，i は虚数単位，ω, ω' は角振動数，$\boldsymbol{E}_{0\mathrm{I}} = (E_{0\mathrm{I}}, 0, 0)$, $\boldsymbol{E}_{0\mathrm{R}} = (E_{0\mathrm{R}}, 0, 0)$, $\boldsymbol{E}_{0\mathrm{T}} = (E_{0\mathrm{T}}, 0, 0)$, $\boldsymbol{k} = (0, 0, k)$, $\boldsymbol{k}' = (0, 0, k')$, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ である．ただし，ω, ω', $E_{0\mathrm{I}}$, $E_{0\mathrm{R}}$, $E_{0\mathrm{T}}$, k, k' は定数である．

マクスウェル方程式を使い，以下の問いに答えよ．

1) 入射波の電場が横波であることをマクスウェル方程式から説明せよ．

2) $\boldsymbol{B}_{0\mathrm{I}}$ を $\boldsymbol{E}_{0\mathrm{I}}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}$, ω, ε_0, μ_0 の中から必要なものを使って表せ．

3) $\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{r}, t)$ に関する波動方程式を導出し、入射波の速さを ε_0, μ_0 を使って表せ．

4) 境界面で電場と磁場が満たす条件を考慮して，$E_{0\mathrm{I}}$, $E_{0\mathrm{R}}$, $E_{0\mathrm{T}}$ の間に成り立つ関係式を 2 つ導け．

5) 入射波と反射波の強度比（反射率）R を ε_0, μ_0, ε の中から必要なものを使って表せ．

問題4 (量子力学)

[1] と [2] はそれぞれの解答用紙に解答せよ.

以下では Planck 定数を 2π で割ったものを $\hbar$ とする.

[1] 1次元においてエネルギー E, 質量 m の1粒子の運動を考える. ポテンシャル $V(x)$ の下での粒子の波動関数 $\psi(x)$ は時間に依存しない Schrödinger 方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\psi(x)=E\psi(x) \tag{1}$$

にしたがう. 以下の問いに答えよ.

1) ポテンシャル $V(x)$ として以下の $V_1(x)$ を考える.

$$V_1(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ V_0 & (x\geq 0)\end{cases} \tag{2}$$

ここで V_0 は定数である. $E>V_0>0$ が成り立つとして, 粒子が x 軸の負方向から正方向に入射するとき, 波動関数は以下の形をとる.

$$\psi(x)=\begin{cases}Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x} & (x<0)\\ Ce^{ik_2x} & (x\geq 0)\end{cases} \tag{3}$$

ただし $k_1(>0)$, k_2, A, B, C は定数である.

a) k_1, k_2 を m, E, V_0, $\hbar$ のうち必要なものを用いて表せ.

b) B, C をそれぞれ k_1, k_2, A を用いて表せ.

c) 波動関数 ψ に対し確率流密度 J は以下のように書ける.

$$J=\frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\frac{d\psi}{dx}-\frac{d\psi^*}{dx}\psi\right) \tag{4}$$

入射波, 透過波それぞれの確率流密度 J_{I}, J_{T} を求めて, その結果から透過率 T を k_1, k_2 を用いて表せ.

(次ページに続く)

2) ポテンシャル $V(x)$ としてポテンシャル $V_2(x) = V_1(x) - g\delta(x)$ (g は正の定数) を考える．ここで $V_1(x)$ は問 1) のポテンシャルであり，$V_0 > 0$ である．また，$\delta(x)$ はデルタ関数である．このポテンシャルの下での粒子の束縛状態 ($E < 0$) の波動関数は以下の形をとる．

$$\psi(x) = \begin{cases} De^{\rho_1 x} & (x < 0) \\ De^{-\rho_2 x} & (x \geq 0) \end{cases} \tag{5}$$

ここで D は定数，ρ_1, ρ_2 は正の定数とする．

a) ρ_1, ρ_2 を m, E, V_0, g, $\hbar$ のうち必要なものを用いて表せ．

b) $\rho_2^2 - \rho_1^2$ を m, V_0, g, $\hbar$ のうち必要なものを用いて表せ．

c) $x = 0$ における波動関数の接続条件を考えることにより，ρ_1 と ρ_2 の間に成り立つ関係式を求めよ．

d) 横軸に ρ_1，縦軸に ρ_2 をとったグラフに問 b), c) で得られた関係を重ねて図示し，その交点の位置に着目することで，このポテンシャルが束縛状態をもつために g が満たすべき条件を求めよ．

e) 問 d) の条件が満たされているとき，束縛状態のエネルギー E を m, V_0, g, $\hbar$ を用いて表せ．

[2] 水素原子中の電子の波動関数を $\psi(\vec{r})$ とする．$\vec{r}$ は陽子から見た電子の位置ベクトル（相対座標）を表す．3 次元極座標 (r, θ, ϕ) を用いて $\vec{r} = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ と表し，$\psi(\vec{r}) = R(r)\,Y(\theta,\phi)$ のように変数分離すると，$R(r), Y(\theta,\phi)$ が従う Schrödinger 方程式は，それぞれ

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left\{\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR(r)}{dr}\right\} + \left\{\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2} - \frac{e^2}{r}\right\} R(r) = E\,R(r)\,, \tag{6}$$

$$-\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\,\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) Y(\theta,\phi) = \ell(\ell+1)\;Y(\theta,\phi) \tag{7}$$

となる．ℓ はゼロまたは正の整数である．μ は電子の換算質量，$-e$ は電子の電荷を表す．$E(<0)$ は束縛状態のエネルギー固有値である．
水素原子の基底状態の規格化された波動関数は $R(r) = N\exp(-r/a_0)$, $Y(\theta,\phi) = 1$ と表される．ただし，$a_0 = \hbar^2/(\mu e^2)$ は Bohr 半径，$N = 1/\sqrt{\pi a_0^3}$ である．

1) 基底状態について電子の位置を測定したときに，陽子からの距離が r から $r+dr$ の間に見出される確率を $P(r)dr$ とする．$P(r)$ を $\mu, \hbar, r, a_0$ のうち必要なものを用いて表し，グラフの概形を図示せよ.（極値があれば極値の位置を求め図に記入せよ.）

2) $\ell = 1$ の $Y(\theta,\phi)$ には空間回転で互いに移りあう 3 つの独立な解がある．そのうちの 1 つは $Y(\theta,\phi) = \cos\theta$ ととれる．残りの 2 つを与えよ.（解となっていることを示す必要はない.）ただし，それら 3 つが単位球面上で波動関数として互いに直交するように選び，直交していることを示すこと.（規格化する必要はない.）

3) この系に摂動ポテンシャル $\Delta V(r) = \sigma r$（σ は正の定数）を加える．基底状態のエネルギー固有値のずれを摂動の 1 次で求めよ．ただし，摂動の 1 次でのエネルギー固有値のずれは，0 次の波動関数に関する期待値で

$$\Delta E = \frac{\langle\psi\,|\,\Delta V\,|\,\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

と与えられることを用いてよい.
（ヒント：k をゼロまたは正の整数とするとき，$\int_0^\infty ds\, s^k e^{-s} = k!$ が成り立つ.）

4) 水素原子の第 1 励起状態の縮重度は 4 である.（電子と陽子のスピンは無視する.）問 3) の摂動ポテンシャル $\Delta V(r)$ が加わったときに，これらの元々4 重に縮退していたエネルギー準位がどのように分裂するか答えよ．ただし，元の第 1 励起状態の動径波動関数には $(n,\ell) = (2,0), (2,1)$ に対応する $R_{20}(r)$, $R_{21}(r)$ の 2 種類があることを用いてよい.（n は主量子数を表す.）また，下表にある動径波動関数に関する積分値を用いてよい.

$4\pi\int_0^\infty dr\, r^k\, |R_{2\ell}(r)|^2$ の値 $(\ell = 0, 1)$.

k	0	1	2	3	4
$\ell = 0$	$1/(4a_0^2)$	$1/(4a_0)$	1	$6a_0$	$42a_0^2$
$\ell = 1$	$1/(12a_0^2)$	$1/(4a_0)$	1	$5a_0$	$30a_0^2$

問題5 (熱・統計力学)

[1]，[2] と [3] はそれぞれの解答用紙に解答せよ.

[1] 物質 1 モルの内部エネルギーを U，エントロピーを S，体積を V，温度を T，圧力を p とすると，熱力学第 1 法則は $dU = TdS - p\,dV$ と表せる．また Helmholtz の自由エネルギーは $F = U - TS$ で与えられる．これらのことを用いて，以下の関係式が成り立つことを示せ.

1) $\left(\dfrac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\dfrac{\partial p}{\partial T}\right)_V$

2) $\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\dfrac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$

[2] ある気体の熱力学的な状態が，van der Waals の状態方程式

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

で表されるとする．ここで p は圧力，V は 1 モルあたりの体積，T は温度，R は気体定数，a, b は正の定数である．この気体の状態変化について次の問いに答えよ．ただし，以下ではこの気体の定積モル比熱は $C_V = \frac{3}{2}R$ で一定であるとする.

1) 気体の温度が T から $T + dT$ に，1 モルあたりの体積が V から $V + dV$ にわずかに変化したとき，次の量を a, b, R, T, V, dT, dV のうち必要なものを用いて表せ．ただし，問 [1] 2) の関係式を用いてよい.

   a) 気体 1 モルあたりの内部エネルギーの微小変化 dU

   b) 気体 1 モルあたりのエントロピーの微小変化 dS

2) 気体 1 モルをピストン付きシリンダーに封入して，その温度を T_1 に保ちながら準静的に圧縮すると，気体の体積は V_0 から $V_0/2$ に変化した．このときピストンが気体にした仕事 W を求めよ.

3) 温度 T_1 の気体 1 モルをピストン付きシリンダーに封入して，断熱的かつ準静的に圧縮すると，気体の体積は V_0 から $V_0/2$ に変化し，温度は上昇した．この過程でピストンが気体にした仕事 W' を求めよ.

[3] 一様な電場 $\boldsymbol{E}=(0,0,E)$ を印加した体積 V の領域の中に，電気双極子モーメント μ をもつ 2 原子分子がある．分子の質量を M，慣性モーメントを I とする．分子の重心の位置ベクトルを $\boldsymbol{R}=(X,Y,Z)$，分子を構成する 2 原子の相対位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=(x,y,z)=(l\sin\theta\cos\phi, l\sin\theta\sin\phi, l\cos\theta)$（$0\le\theta\le\pi$, $0\le\phi<2\pi$, l は定数）とし，$P_X, P_Y, P_Z, p_\theta, p_\phi$ をそれぞれ X, Y, Z, θ, ϕ に正準共役な運動量とすると，分子のエネルギーは $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$ で与えられる．ここで

$$\varepsilon_1=\frac{1}{2M}\Big(P_X^2+P_Y^2+P_Z^2\Big),\quad \varepsilon_2=\frac{1}{2I}\Big(p_\theta^2+\frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}\Big),\quad \varepsilon_3=-\mu E\cos\theta \qquad (1)$$

はそれぞれ並進運動のエネルギー，回転運動のエネルギー，電場と電気双極子モーメントとの相互作用エネルギーである．以下の問いに答えよ．

1) 並進の自由度および回転の自由度に関する一つの分子の分配関数はそれぞれ

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{h^3}V\int_{-\infty}^{\infty}dP_X\int_{-\infty}^{\infty}dP_Y\int_{-\infty}^{\infty}dP_Z\ \exp\Big(-\beta\varepsilon_1\Big), \\ Z_2 &= \frac{1}{h^2}\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\phi\int_{-\infty}^{\infty}dp_\theta\int_{-\infty}^{\infty}dp_\phi\ \exp\Big(-\beta(\varepsilon_2+\varepsilon_3)\Big) \end{aligned}$$

で定義される．ただし $\beta=1/(k_{\mathrm{B}}T)$，$k_{\mathrm{B}}$ は Boltzmann 定数，T は温度，h は Planck 定数である．積分を実行して分配関数 Z_1 および Z_2 を求めよ．必要であれば以下の公式を用いてもよい.（ただし α は正の定数）

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\ \exp\big(-\alpha x^2\big)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

2) 分子のエネルギーの平均値 $\langle\varepsilon\rangle=\langle\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3\rangle$ を求めよ．

3) 式 (1) のエネルギーを持つ 2 原子分子が体積 V の中に 1 モル（分子 R/k_{B} 個，ただし R は気体定数）存在するとする．分子間の相互作用は無視できるとして以下の問いに答えよ．必要であれば以下の近似式を用いてもよい．

$$\sinh x\approx x \quad (|x|\ll 1)$$

a) 定積モル比熱 C_V を計算せよ．

b) $\mu E/k_{\mathrm{B}}T\to\infty$ の極限での C_V の値を求めよ．

c) $\mu E/k_{\mathrm{B}}T\to 0$ の極限での C_V の値を求め，エネルギー等分配則との関係を説明せよ．