令和３年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

物　理　学　専　攻

筆　記　試　験　問　題

《令和２年８月２４日（月）・２５日（火）実施》

問題1 (基礎数学)

[1], [2] と [3] は別々の解答用紙に解答せよ.

以下の問題では i を虚数単位とする.

[1]

1) 二重積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)}dxdy$$

を極座標を用いて求めよ. ただし, a は正の定数である.

2) 問 1) の結果を使って次の積分の値を求めよ. ただし, a は正の定数である.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx$$

[2]

周期 1 の周期関数 ($f(x+1)=f(x)$ を満たす関数) を

$$f(x)=\sum_{n=0,\pm1,\pm2,\dots} c_n e^{2\pi inx}$$

と表すことを考える. c_n は $f(x), n$ によって決まる定数である.

1) 区間 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ の $f(x)$ を含む積分として c_n を表せ.

2) $f(x)$ が $-\frac{1}{2}\leq x<\frac{1}{2}$ に対し

$$f(x)=x$$

と与えられるとき, c_n を求めよ.

3) a) $f(x)$ が次の式で与えられるとき, c_n を求めよ. ここで $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である.

$$f(x)=\sum_{m=0,\pm1,\pm2,\dots}\delta(x-m)$$

b) ある関数 $g(x)$ に対して, $G(k)$ を

$$G(k)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{2\pi ikx}\,dx$$

と定義すると, 次式が成り立つことを問 3)a) の結果を使って示せ.

$$\sum_{n=0,\pm1,\pm2,\dots} g(n)=\sum_{k=0,\pm1,\pm2,\dots} G(k)$$

[3] 次の3つの行列を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1) 3つのうちエルミート行列であるものとユニタリー行列であるものをそれぞれすべて選べ. 答のみでよい.

2) y を実数として $\exp(iyB)$ を計算し, 2行2列の行列として表せ. ここで任意の行列 D に対して $\exp(D) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D^n$ と定義する. ただし $D^0 = E$(単位行列) である.

3) x, y, z を実数として以下の行列 M の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ.

$$M = xA + yB + zC$$

ただし, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 0$ とする. 解答にはこの r を用いてよい.

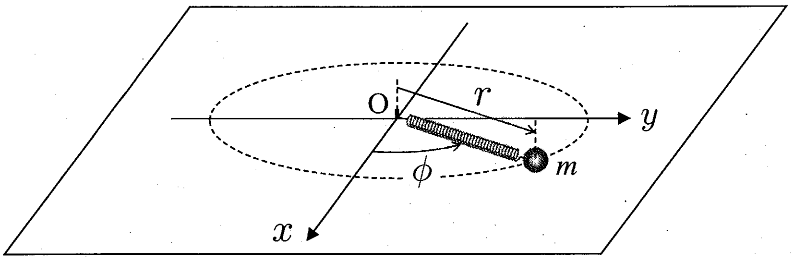
4) 問3) の行列 M に対して行列 $\exp(iM)$ を考える. この行列について以下の問いに答えよ.

a) すべての固有値を求めよ.

b) 行列式およびトレースを求めよ.

問題2 (力学)

下図のように，水平面上の原点Oにバネ（バネ定数k，自然長ℓ）の一端を摩擦なく回転できるようにつなぎ，バネの他端に質量mの質点（小球）を取り付ける．このとき，バネはたるまずに直線的に伸び縮みし，質点は平面から離れずに摩擦なく運動するものとする．原点から質点までの距離をr，x軸からの方位角をϕとして，質点の位置を極座標(r, ϕ)で表す．バネの質量と太さは無視できるものとして以下の問いに答えよ．



1) この質点の運動について，以下の問いに答えよ．

   a) 質点の速度の大きさの2乗を，$r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}$の中から必要なものを用いて表せ．

   b) 質点の運動に関するラグランジアンLを，$r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}, k, \ell, m$の中から必要なものを用いて表せ．

   c) 問1)b)で求めたラグランジアンLを用いて運動方程式の動径成分を求めよ．

   d) ϕの共役運動量P_ϕを求め，P_ϕが保存することを示せ．

2) 質点が$r = r_0$で等速円運動をしているときの角速度ω_0を，r_0, k, ℓ, mを用いて表せ．

3) 問2)の状態から，P_ϕを一定に保ったまま，rをr_0からわずかに変化させた．その後，質点の動径方向の運動はr_0を中心とした微小な振動となった．振動の変位を$\rho = r - r_0$として，以下の問いに答えよ．ただし，$|\rho| \ll r_0$であり，微小量ρ/r_0の2次以上の項は無視せよ．

   a) ρに関する運動方程式を求め，振動の角速度ω_rを，r_0, k, ℓ, mを用いて表せ．

   b) 時刻$t = 0$において$\rho(0) = \rho_0$，$\phi(0) = 0$とする．ただし，$\rho_0(> 0)$は，この運動におけるρの最大値である．このとき，時刻tにおける$\phi(t)$を，$r_0, \rho_0, \omega_0, \omega_r$を使って表せ．

   c) 質点がOの周りを1回転したときに，ρがちょうど1回振動する運動が起こりえるかどうかを理由とともに述べよ．

問題3 (電磁気学)

[1],[2] と [3] は別々の解答用紙に解答せよ.

真空中の電磁場に関して以下の問いに答えよ.

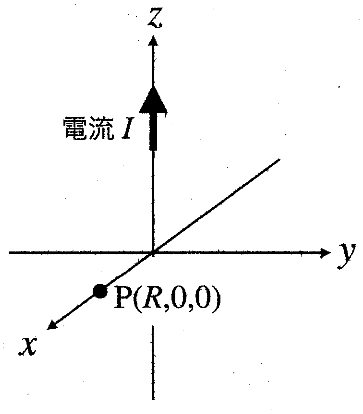


図 1

[1] 図 1 のような直交座標系を考える. z 軸に沿って無限に長い導線を配置する. この導線に z 軸の正の向きに定常電流 I が流れているとき, 点 P$(R,0,0)$ にこの定常電流が作る磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を, ビオ・サバールの法則を使い求めよ. ここで, $R>0$, 真空の透磁率を μ_0 とする.

[2] 真空の誘電率を ε_0 として以下の問いに答えよ. 電位の基準は無限遠を 0 とする.

1) 半径 b の球の中に電荷密度 $\rho(>0)$ で一様に電荷が分布している. 球の中心を原点 O としたとき, 電荷が位置 $\boldsymbol{r}$ に作る電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ および静電ポテンシャル $\phi(r)$, $(r=|\boldsymbol{r}|)$, を求めよ.

2) 図 2 のように, 問 1) の電荷分布から, 原点 O を中心とした半径 $a(<b)$ の球内の電荷を取り除いた.

   a) この時, 電荷の作る静電ポテンシャル $\phi(r)$ を求めよ. また, その概形をグラフに示せ (解答用紙裏面).

   b) この系の持つ静電エネルギー U を求めよ.

3) 図 3-(1) のように, それぞれ半径 $a, b(>a)$ の球殻導体 A, B が原点 O を中心として置かれている. 内側の球殻 A に電荷 Q_1, 外側の球殻 B に電荷 Q_2 を与える.

   a) 与えた電荷により作られる電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ.

   b) 今, 図 3-(2) のように内側の球殻 A の中心を O(0,0,0) から O′$(-c$,0,0) へ動かしたとき, 球殻 B の外部に作られる電場は問 3)a) の場合と比べどうなるかを理由とともに説明せよ. ただし, c は $0<c<b-a$ を満たすものとする.

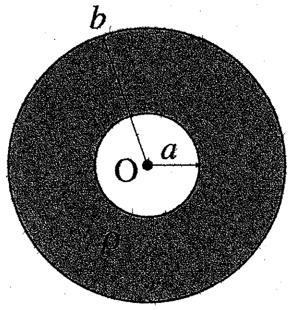


図2

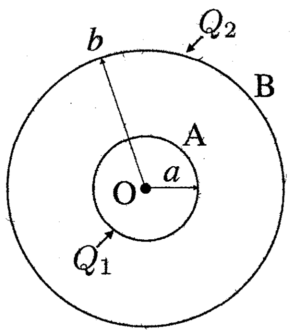


図3-(1)

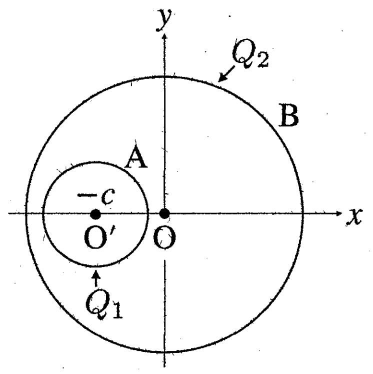


図3-(2)

[3] 以下の問いに答えよ．ただしSI（MKSA単位系を拡張した国際単位系）で書くこと．

1) 電場，磁束密度，電荷密度，電流密度，真空の誘電率，真空の透磁率をそれぞれ $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$，ρ，$\boldsymbol{i}$，ε_0，μ_0 としたときのマクスウェル方程式を書け．

2) マクスウェル方程式のそれぞれの式についてその物理的な意味を30文字以内で簡潔に述べよ．

3) マクスウェル方程式から電荷保存則（連続の式）を導け．

4) マクスウェル方程式から真空中（$\rho=0$ および $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0}$）での $\boldsymbol{E}$ に関する波動方程式を導き，波の速さを ε_0 と μ_0 を使って表せ．

5) a) ポインティングベクトル $\boldsymbol{S}$ の定義式を書け．

   b) 真空中（$\rho=0$ および $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0}$）ではある量 U を使って $\nabla\cdot\boldsymbol{S}=-\frac{\partial U}{\partial t}$ と書ける．マクスウェル方程式を使って U の表式を導出せよ．

問題4 (量子力学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ.

以下ではプランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ とする.

[1] 1次元ポテンシャル中を運動する質量 m の粒子を考える. ハミルトニアンは, 座標 x に共役な運動量演算子を p として,

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

である. ただし, ω は正の定数である. 演算子 $a, a^\dagger$ を

$$a = \sqrt{\frac{1}{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}x + i\frac{p}{\sqrt{m\omega}}\right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}x - i\frac{p}{\sqrt{m\omega}}\right),$$

と定義する. 状態 $|0\rangle$ を, $a|0\rangle = 0$ を満たす規格化された状態とする. また0以上の整数 n に対して状態 $|n\rangle$ を $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle$ で定義する. 以下の問いに答えよ. なお、状態 $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \cdots$ が正規直交基底をなすことを使ってもよい.

1) x と p の交換関係を使って, $[a, a^\dagger] = 1$ であることを示せ.

2) $H_0 = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$ であることを示せ.

3) 状態 $|n\rangle$ が H_0 の固有状態であることを示し, その固有値を求めよ.

4) 演算子 x を $|n\rangle$ に作用させた状態 $x|n\rangle$ を, 状態 $|\ell\rangle$ ($\ell = 0, 1, 2, \cdots$) の線形結合として表せ.

5) ハミルトニアンに摂動 $H_1 = \lambda x^4$ を加える. ここで λ は正の定数である. 摂動を加えた後のハミルトニアンは $H = H_0 + H_1$ である. 摂動を加えたことによる基底状態のエネルギー変化 ΔE を λ に関する摂動の1次まで考慮して求めよ.

[2] 磁場 $\boldsymbol{B}$ の中に置かれたスピン 1/2 の粒子を考える．粒子は静止しているとして簡単のため磁場とスピンの間の相互作用のみに着目する．ハミルトニアンはスピン演算子を $\boldsymbol{S}$ として

$$H = -\mu \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{B}$$

と与えられるとする．ただし，μ は正の定数である．粒子のスピンが z 軸に対して上向き，下向きの状態をそれぞれ $|+\rangle, |-\rangle$ として，粒子の状態 $|\psi(t)\rangle$ を

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \langle +|\psi(t)\rangle \\ \langle -|\psi(t)\rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \psi_+(t) \\ \psi_-(t) \end{pmatrix}$$

で表す．このとき $\psi(t)$ に作用する x, y, z 方向のスピン演算子がそれぞれ

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と表されることを用いて，以下の問いに答えよ．

1) まず磁場が時間によらず一様で z 軸方向を向いていて

$$\boldsymbol{B} = (0, 0, B_0)$$

と与えられる場合を考える．ただし，B_0 は定数である．

a) $\psi(t)$ の規格化条件を $\psi_+(t)$ と $\psi_-(t)$ を用いて表せ．

b) 任意の状態に対して，S_z の期待値 $\langle S_z \rangle$ の絶対値が $\hbar/2$ 以下となることを示せ．

c) $\omega_0 = \mu B_0$ とおいて $\psi_+(t)$ と $\psi_-(t)$ の時間発展を記述する微分方程式を書け．

d) 時刻 $t = 0$ において

$$\psi(0) = \begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix}$$

であったとする．この後の $|\psi_+|^2, |\psi_-|^2$ の時間発展を求めよ．ここで，$A_\pm$ は定数（複素数）である．

e) $A_+ = A_- = 1/\sqrt{2}$ の場合に，任意の時刻 $t > 0$ での状態 $\psi(t)$ における S_x と S_y の期待値を求めよ．

2) 次に問 1) の z 軸方向の一様磁場に，xy 平面内で一定の角振動数 ω で回転する磁場を加えて

$$\boldsymbol{B} = (B_0 \cos\omega t, -B_0 \sin\omega t, B_0)$$

となるようにした．このとき以下の問いに答えよ．ただし，$\omega_0 = \mu B_0$ を用いてよい．

a) $\psi_+(t)$ と $\psi_-(t)$ の時間発展を記述する微分方程式を書け．

b) 問 2)a) の微分方程式の一般解は次式で与えられる．

$$\psi_+(t) = \exp\left(i\frac{\omega}{2}t\right)\left[A\exp\left(i\frac{\Omega}{2}t\right) + B\exp\left(-i\frac{\Omega}{2}t\right)\right], \tag{i}$$

$$\psi_-(t) = \exp\left(-i\frac{\omega}{2}t\right)\left[A r_+ \exp\left(i\frac{\Omega}{2}t\right) + B r_- \exp\left(-i\frac{\Omega}{2}t\right)\right]. \tag{ii}$$

ただし，A と B は任意定数，および

$$\Omega = \sqrt{(\omega-\omega_0)^2+\omega_0^2}, \quad r_\pm = \frac{\omega-\omega_0\pm\Omega}{\omega_0}$$

である．

初期条件 $\psi_+(0)=0$, $\psi_-(0)=1$ が満たされる場合に，時刻 $t>0$ においてスピンが z 軸の正の向きに（$|+\rangle$ の状態に）観測される確率 $P_+(t)$ を求めよ．

c) 問 2)b) で求めた確率 $P_+(t)$ は時間と共に変化するが，その最大値が 1 となるための条件（共鳴条件）を ω_0, ω, μ, $\hbar$ のうちの必要なものを用いて表せ．また，共鳴が起きる理由を簡潔に述べよ．

d) 問 2)b) の (i),(ii) 式で与えられた一般解 $\psi_+(t)$, $\psi_-(t)$ が，問 2)a) の微分方程式を満たすことを示せ．（ヒント：A と B の係数ごとに分けて示すとよい．）

問題5 (熱・統計力学)

[1],[2] と [3] は別々の解答用紙に解答せよ.

[1] 以下の $\boxed{（ア）}$～$\boxed{（カ）}$ にあてはまる熱力学的物理量を下から1つ選び，文を完成させよ．答は物理量を表す記号のみでよく，同じ物理量を何度用いてもよい．

T（絶対温度），S（エントロピー），p（圧力），V（体積），U（内部エネルギー），F（ヘルムホルツの自由エネルギー），G（ギブスの自由エネルギー），H（エンタルピー）

1) 理想気体が準静的に断熱変化したとき，変化しないのは $\boxed{（ア）}$ である．
2) 理想気体が準静的に等温変化したとき，変化しないのは温度と $\boxed{（イ）}$ である．
3) 理想気体が準静的に等温変化したとき，外界からされた仕事は変化後と変化前における $\boxed{（ウ）}$ の差に等しい．
4) 安定相にある系を圧力一定のまま温度変化させたところ，系は別の安定相に1次相転移した．このとき転移温度における2つの相の1モルあたりの $\boxed{（エ）}$ の差を潜熱という．
5) 平衡にある系の状態を変えずにその一部を取り出したとき，取り出した系の大きさ（粒子数）に比例する量を示量性の量，取り出した系の大きさによらない量を示強性の量とよぶ．上記の熱力学量のうち，示強性の量は $\boxed{（オ）}$, $\boxed{（カ）}$ である．

[2] 液相と固相の共存について以下の問いに答えよ．なお，T は絶対温度，S はエントロピー，p は圧力，V は体積，μ は化学ポテンシャル，N は粒子数である．

1) 内部エネルギー U の全微分が $dU = TdS - pdV + \mu dN$ と書けることを用いて，ギブスの自由エネルギー G の全微分を求めよ．
2) a) 熱力学量には示量性の量と示強性の量があることに注意して，ギブスの自由エネルギーは $G = Nf(T,p)$ の形に表せることを示せ．ここで $f(T,p)$ は T, p の関数であり N に依存しない．
   b) 問 2)a) の結果から，ギブスの自由エネルギーは $G(T,p,N) = N\mu$ の形に表せることを示せ．
3) 液相および固相における1分子あたりのエントロピーをそれぞれ s_l, s_s，1分子あたりの体積をそれぞれ v_l, v_s とする．これらの量を用いて，p–T 図における液相と固相の共存曲線の傾き dp/dT を表せ．
4) p–T 図における液相と固相の共存曲線の傾き dp/dT が負となる物質を一つ挙げ，そうなる理由を問 3) の結果にもとづいて述べよ．

[3] ある物質中において，単位体積あたりの電子の状態密度 $D(\varepsilon)$ が，ε をエネルギー，D_0, E_0 を正の定数として

$$D(\varepsilon) = \begin{cases} D_0\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon}{E_0}\right)^2} & (-E_0 \leq \varepsilon \leq E_0) \\ 0 & (\varepsilon < -E_0, \varepsilon > E_0) \end{cases}$$

で与えられている（図1参照）．以下の問いに答えよ．ただしフェルミ分布関数が

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_{\mathrm{B}}T}+1}$$

であることを用いてよい．ここで T は絶対温度，μ は化学ポテンシャル，k_{B} はボルツマン定数である．

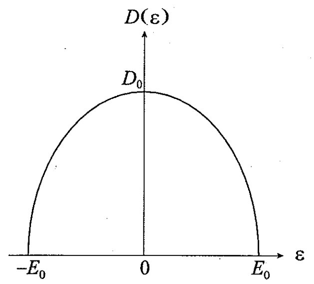


図 1: 状態密度 $D(\varepsilon)$

1) 単位体積あたりの状態数 N_0 を D_0 および E_0 を用いて表せ．

次に単位体積あたりの電子の数が $N_0/2$ の場合を考える．状態密度が $\varepsilon = 0$ に関して対称（$D(\varepsilon) = D(-\varepsilon)$）なので化学ポテンシャルは温度によらず $\mu = 0$ となる．十分に低温（$k_{\mathrm{B}}T \ll E_0$）のとき以下の問いに答えよ．

2) a) 電子系全体のもつ単位体積あたりの内部エネルギー U を求めよ．ただし，考えている状況では，なめらかな関数 $X(\varepsilon)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon \approx \int_{-\infty}^{\mu} X(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2(k_{\mathrm{B}}T)^2}{6}X'(\mu) \qquad (1)$$

が成り立つことを用いてよい．

b) 問2) a) の結果を用いて電子系全体のもつ単位体積あたりの比熱 C を求めよ．

問1), 問2) において，電子の1粒子エネルギーはスピンに関して縮退しており，各スピン状態ごとにそれぞれ $D(\varepsilon)/2$ の状態密度を持っていたとする．いまこの系に一様な微小磁場 H を新たに印加した状況を考える．電子と磁場との間の相互作用のハミルトニアン $\mathcal{H}_{\mathrm{int}}$ は

$$\mathcal{H}_{\mathrm{int}} = m_0 H\sigma$$

で与えられるとする．ただし $\sigma = \pm 1$ はスピン変数，m_0 は電子のスピン磁気モーメントの絶対値，$m_0|H| \ll E_0$ である．

3) 単位体積あたりの磁化 M を

$$M = -m_0\Big(N_+ - N_-\Big)$$

で定義する．ここで N_+ および N_- はそれぞれスピン $\sigma = +1$ および -1 をもつ単位体積あたりの電子数の期待値である．

a) N_+ および N_- を状態密度およびフェルミ分布関数を使って積分で表せ.

b) $T=0$ における磁化率 $\chi = \frac{\partial M}{\partial H}$ を求めよ.

c) 問 2) a) で与えた式 (1) を用いて低温における磁化率を T についての 2 次までの近似で求めよ.