令和２年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

物　理　学　専　攻

筆　記　試　験　問　題

《令和元年８月１９日（月）・２０日（火）実施》

問題 1 (基礎数学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ.

[1] 以下の問いに答えよ.

1) a) 関数

$$f(x,y)=\sqrt{xy}$$

を $(x,y)=(8,2)$ のまわりで 1 次までテイラー展開せよ.

b) 曲面

$$z=\sqrt{xy}$$

の $(x,y)=(8,2)$ における接平面（接線をすべて含む平面）の方程式と単位法線ベクトルを求めよ.

2) a) 以下の行列の固有値 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ と対応する単位固有ベクトル $\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{p_2},\boldsymbol{p_3}$ を求めよ．ただし，$|\lambda_1|<|\lambda_2|<|\lambda_3|$ とする.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) 問 2)a) で求めた固有ベクトル $\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{p_2},\boldsymbol{p_3}$ を使って，行列 $P=(\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{p_2},\boldsymbol{p_3})$ と定める．P の転置行列を P^T と表したとき，P^TP を求めよ.

c) xyz 空間中の以下の曲面で囲まれる領域の体積を求めよ.

$$3x^2+3y^2+2z^2+2yz+2zx=1$$

与式は問 2)a) の A を用いて

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=1$$

と書けることを利用せよ.

[2] 次の方程式を満たす関数 $g(t)$ について以下の問いに答えよ．

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+2\frac{d}{dt}+5\right)g(t)=\delta(t) \tag{1}$$

ここで $\delta(t)$ はディラックのデルタ関数である．

1) $g(t)$ を以下のように表す．

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{2}$$

ここで i は虚数単位である．$g(t)$ が式 (1) を満たすように，$G(\omega)$ を決定せよ．必要であれば公式

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}d\omega \tag{3}$$

を使ってもよい．

2) $G(\omega)$ の極をすべて求めよ．

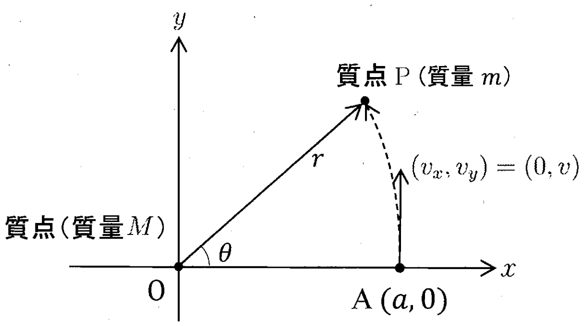
3) 以下の a)，b) の場合に分けて，複素積分を用いて $g(t)$ を求めよ．このとき計算に用いる積分経路と問 2) で求めた極を a)，b) それぞれの場合に対して解答用紙の表面および裏面の所定のグラフに図示せよ．

a) $t>0$ の場合．

b) $t<0$ の場合．

問題2 (力学)

下図のように，原点Oに置かれた質量 M の質点がつくる重力場の下での質点P（質量 m）の運動を考える．質点Pは，時刻 $t=0$ において下図のA $(a,0)$ から初速度 $(v_x,v_y)=(0,v)$ を与えられ，xy 平面内を運動する．ただし $v>0$ とする．質点Pと原点Oとの距離を r，x 軸と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を θ とする．原点Oに置かれた質量 M の質点は動かないものとし，万有引力定数を G として以下の問いに答えよ．



1) 質点Pが原点Oのまわりで円運動する場合の初速度の大きさ $v=v_0$ を，a, M, m, G のうち必要なものを用いて表せ．

2) 質点Pの運動を知るため，運動方程式を解くことを考える．

   a) 質点PのラグランジアンLを，a, M, m, G, r, $\dot{r}$, θ, $\dot{\theta}$ のうち必要なものを用いて記せ．

   b) 質点Pのラグランジュ方程式を記せ．

   c) ラグランジュ方程式から，$h=r^2\dot{\theta}$ が一定になることを示せ．

   d) 問2)c)の結果を用いて，ラグランジュ方程式から $\dot{\theta}$ を消去し，$u=\frac{1}{r}$ と変数変換することで，次の微分方程式を導け．

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{GM}{h^2} \tag{1}$$

3) 初速が $v=kv_0$ の場合を考える．ここで，v_0 は問1)で求めた速度の大きさであり，k は $k\geq 1$ の定数である．

   a) 微分方程式(1)を解き，質点Pの軌道 $r(\theta)$ を a, k, θ を用いて表せ．

   b) $1\leq k<k_1$ であるとき，質点Pの軌道 $r(\theta)$ は有限な範囲にとどまる．問3)a)の結果を用いて，k_1 を求めよ．

   c) $1<k<k_1$ の範囲にある k をひとつ固定しよう．このとき軌道上を運動する質点Pの速さの最小値 $v_{\min}$ を，k と v_0 を用いて表せ．

   d) $k=\sqrt{3}$ の場合に，質点Pの運動の軌跡（$t\geq 0$）の概形を解答用紙裏面のグラフに図示せよ．

問題3 (電磁気学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ.

[1] 真空の透磁率を μ_0 として，定常電流が作る真空中の磁場に関連する以下の問いに答えよ.

1) 図1のように z 軸上に置かれた無限に長い直線導線に，z 軸正方向に一定の電流 $I(>0)$ が流れている．三つの同じ半径の一巻きコイルを，中心を $(0, d, 0)$ を通る z 軸と平行な直線上に置き，コイルの直径方向を軸にして回転させた．ただし，図のようにそれぞれのコイルの回転軸は (A) y 軸に平行，(B) z 軸に平行，(C) x 軸に平行である．d はコイルの半径より十分大きいため，直線導線の電流が作る磁束密度 $\boldsymbol{B}$ はコイル内では一定としてよい．以下の問いに答えよ.

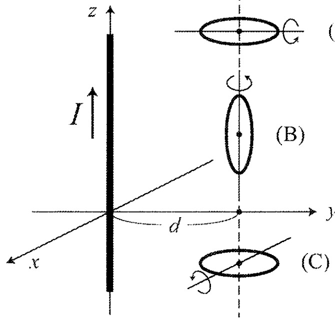


図1

a) z 軸正方向から見たときに，この直線電流が作る磁場の磁力線を向きを明示して解答用紙の所定の場所に図示せよ.

b) 回転によって生じる起電力がゼロとなるコイルを (A)，(B)，(C) からすべて選び，ゼロとなる理由を付して答えよ．ただしコイルを流れる電流による磁場は無視してよい.

2) 図2のように，x 軸を通り，z 軸に平行かつ等距離にある2本の無限に長い直線導線に，同じ強さの一定の電流 $I(>0)$ が z 軸正方向に流れている．y 軸上にあり，原点から等距離の点Pおよび点Qに生じる磁場の向きを，解答用紙の図に矢印で示せ.

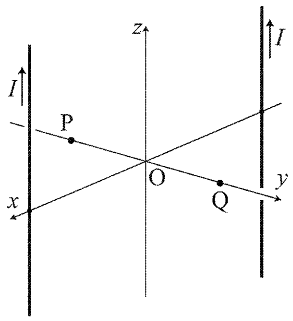


図2

3) 図 3 のように，zx 平面上に置かれた厚さの無視できる無限に広い平板導体に，z 軸の正方向に一様で単位幅当たり $i(>0)$ の電流を流した．y 軸上の長さ a の抵抗 R と平行導線を連結した回路を，zx 平面から平行に L だけ離し，平行導線の面と xy 平面のなす角が θ になるように置いた．さらに，平行導線上に摩擦なしにすべることができる質量 m の導体棒を置いた．導体棒は，平行導線と常に離れることなく，y 軸と平行を保ちつつ運動する．平行導線，導体棒の抵抗と太さは無視できる．z 軸正方向を鉛直上方向とし，重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ．

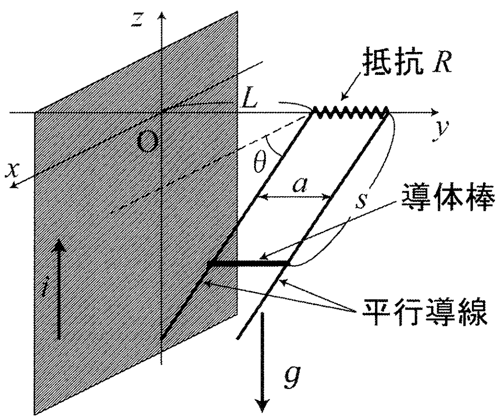


図 3

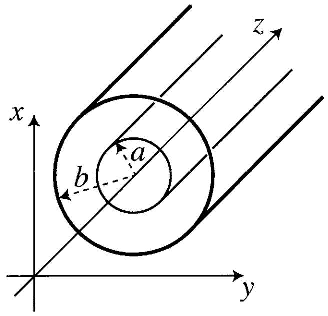
a) 系の対称性より，平板導体を流れる電流が作る磁束密度は y 座標のみの関数 $\boldsymbol{B}(y)$ となる．アンペールの法則を使って，$\boldsymbol{B}(y)$ を $y>0$ および $y<0$ のそれぞれの領域に対して求めよ．

平行導線上の導体棒を時刻 $t=0$ にそっと離した．

b) 抵抗と導体棒の間の距離 s を使って，平行導線に沿った方向に対する導体棒の運動方程式を求めよ．回路を流れる電流がつくる磁場の影響は無視してよい．

c) 導体棒の速さ v を時間 t の関数として求めよ．

[2] 薄い導体で作られた無限に長い円筒状の導波管内部を伝播する電磁波を考える．中心軸を z 軸とし，中心軸からの距離を r としたとき，$0 \leq r \leq a$ は導体，$a < r < b$ は真空（誘電率 ε_0，透磁率 μ_0）であり，表面 $(r = b)$ は薄い導体で覆われている．いま，伝播する電場 $(\boldsymbol{E})$，磁束密度 $(\boldsymbol{B})$ を以下の平面波とする．



$$\boldsymbol{E}(x, y, z, t) = (E_x(x, y), E_y(x, y), 0)\ e^{i(kz - \omega t)} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{B}(x, y, z, t) = (B_x(x, y), B_y(x, y), 0)\ e^{i(kz - \omega t)} \tag{2}$$

ここで，k は波数，ω は角振動数，i は虚数単位である．また導体は完全導体 (抵抗率が 0) である．

1) 式 (1)，(2) で与えられる $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ に対して $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}$ を計算せよ．

真空中のマクスウェル方程式は以下のように書ける．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0, \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0$$

2) 問 1) の結果をマクスウェル方程式に代入し，k と ω の関係式を導け．

電場の x および y 成分の振幅を用いて $\boldsymbol{E_T} = (E_x(x, y), E_y(x, y))$ と定義しよう．問 1) の結果およびマクスウェル方程式を使うと

$$\boldsymbol{E_T} = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x}, -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \tag{3}$$

を満たすスカラー関数 $\Phi(x, y)$ が存在することがわかる．これにより $\boldsymbol{E_T}$ を 2 次元静電場として扱うことができる．

3) 式 (3) のように表すことができる理由を説明せよ．

4) 式 (3) およびマクスウェル方程式からスカラー関数 Φ はラプラス方程式 $\Delta \Phi = 0$ を満たす．(r, ϕ) を $(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ で定義される 2 次元極座標とする．$r = a$ で $\Phi = V_0 (> 0)$，$r = b$ で $\Phi = 0$ を満たす解を $r \leq b$ の範囲で求めよ．必要ならば 2 次元のラプラシアンが極座標で以下のように書けることを用いてもよい．

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \tag{4}$$

5) $\boldsymbol{e_r}$, $\boldsymbol{e_\phi}$ をそれぞれ r, ϕ が増加する方向を向いた単位ベクトルとする．問 4) の結果から $r < b$ における $\boldsymbol{E_T}$ および $\boldsymbol{B_T} = (B_x(x,y), B_y(x,y))$ をそれぞれ $\boldsymbol{e_r}$, $\boldsymbol{e_\phi}$ を使って表せ．さらに電気力線，磁力線の概形を解答用紙の所定の場所に図示せよ．

以上のように 2 次元の問題として求めた $\boldsymbol{E_T}$ および $\boldsymbol{B_T}$ を式 (1)，(2) に代入することによって z 軸方向に伝搬する電磁波の解を求めることができる．実際の電場および磁場はそれぞれ式 (1)，(2) の実部で与えられる．

6) $r = a$ の導体表面上に現れる電荷面密度 $\sigma(z,t)$ を求めよ．

7) ポインティングベクトル $\boldsymbol{S}$ を計算し，この導波管の断面 $(z = 0)$ を単位時間あたりに通過する電磁場のエネルギー $P(t)$ を求めよ．

問題4 (量子力学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ.

[1] ポテンシャル $V(x)$ の一次元系を考える.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ V_0 & (x > 0) \end{cases} \tag{1}$$

である (ここで V_0 は定数). エネルギー $E > 0$ を持った質量 m の粒子が, x が負の側から正の側へ向けて入射する状況を考える. この粒子の波動関数 $\psi(x)$ は時間に依存しないシュレディンガー方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x) \tag{2}$$

に従う. ここで $\hbar = h/2\pi$ (h はプランク定数) である. 入射波の波動関数は $A\exp(ik_1x)$ と書け (i は虚数単位), ポテンシャルによって波動関数に反射波が生じる.
まず, $0 < E < V_0$ の場合について考える.

1) $x < 0$ の領域の波動関数 ψ_{I} と, $x > 0$ の領域の波動関数 ψ_{II} はどのような関数形になるか, 次の中から選択し, 理由をそれぞれ1行程度で説明せよ. ただし k_1, k_2, k_3 は正の定数, A, B, C は複素定数とする.

$$\psi_{\mathrm{I}}(x) = \begin{cases} A\exp(ik_1x) + B\exp(ik_2x) & \text{(a1)} \\ A\exp(ik_1x) + B\exp(-ik_2x) & \text{(b1)} \\ A\exp(ik_1x) + B\exp(k_2x) & \text{(c1)} \\ A\exp(ik_1x) + B\exp(-k_2x) & \text{(d1)} \end{cases} \qquad \psi_{\mathrm{II}}(x) = \begin{cases} C\exp(ik_3x) & \text{(a2)} \\ C\exp(-ik_3x) & \text{(b2)} \\ C\exp(k_3x) & \text{(c2)} \\ C\exp(-k_3x) & \text{(d2)} \end{cases}$$

2) 問 1) の答の中の k_1, k_2, k_3 を求めよ.

3) この波動関数が $x = 0$ で満たすべき境界条件を述べよ.

4) $A = 1$ とし, k_1, k_2, k_3 のうち必要なものを用いて B と C を表せ.

次に E を一定に保ったまま V_0 を正から負へと連続的に変化させる.

5) $V_0 < E$ の場合の波動関数 ψ_{I}, ψ_{II} の関数形を問 1) の選択肢から選び, 理由とともに答えよ.

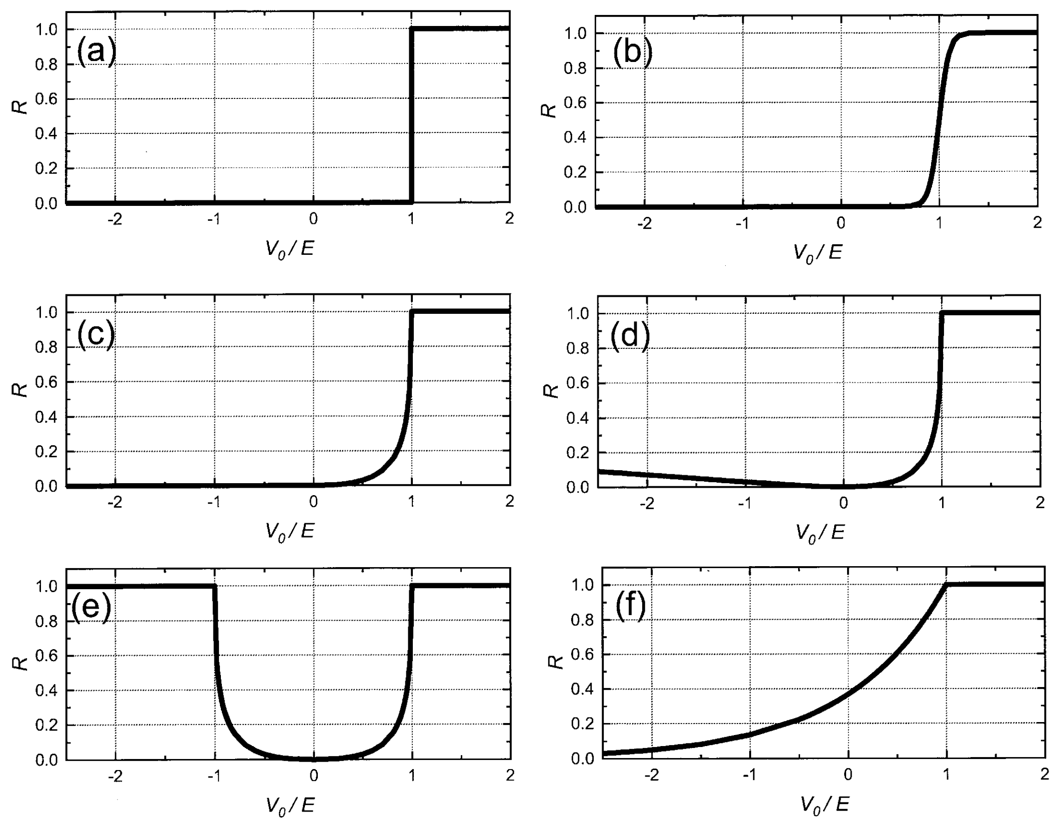
波動関数 ψ に対する x 方向への確率流密度 J は

$$J = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\frac{d\psi}{dx} - \frac{d\psi^*}{dx}\psi\right)$$

と書ける.

6) 入射波の確率流密度 J_{in} を求めよ．ここでも $A=1$ とし，また k_1 を用いた形に式をまとめよ．

7) 反射波の確率流密度を J_{ref} とする．反射率 $R=|J_{\mathrm{ref}}|/|J_{\mathrm{in}}|$ の V_0 依存性の概形としてもっとも適切なものを選択肢 (a)-(f) から選び，それを選んだ理由を説明せよ．（図の横軸は V_0 を E で割った量である点に注意せよ.）



[2] xyz 座標で張られる3次元空間で，水素原子中の質量 m_e の電子を考える．簡単のため原子核は十分重く原点から動かないとし，電子のスピンを無視する．さらにそこに微小な一様電場 $\mathcal{E}$ による摂動 $V_1 = e\mathcal{E}z$ を加える．ここで e は電気素量である．以下では $\mathcal{E}$ の1次の効果だけ考えることにする．電子のハミルトニアン H は次の式で与えられる．

$$H = H_0 + V_1 = \frac{1}{2m_e}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + e\mathcal{E}z \tag{3}$$

ここで H_0 は $\mathcal{E} = 0$ でのハミルトニアン，$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$，ϵ_0 は真空の誘電率，$(p_x, p_y, p_z) = (-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial z})$，$\hbar = h/2\pi$（$h$ はプランク定数）である．原点を中心とした角運動量演算子を (L_x, L_y, L_z) と書き，$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ とする．一般に演算子 A, B に対して $[A, B] = AB - BA$ と定義する．

1) $\mathcal{E} = 0$ のときハミルトニアンが回転対称性をもつことを使って $[L_x, H_0], [L_y, H_0]$, および $[L_z, H_0]$ の値を書き下せ．答のみでよい．

2) $[L_x, V_1], [L_y, V_1]$, および $[L_z, V_1]$ を，$x, y, z, p_x, p_y, p_z, \mathcal{E}, \hbar, e$ のうち必要なものを使った最も簡潔な式で書き下せ．答のみでよい．

水素原子の第1励起準位（$2s$ および $2p$ 軌道）には縮退した4つの状態がある．固有値 $(L^2, L_z) = (\hbar^2\ell(\ell+1), \hbar m)$ を持つ波動関数を $\Psi_{\ell,m}$ と書くとき，これら4つの状態は $\Psi_{0,0}$，$\Psi_{1,0}$，$\Psi_{1,1}$，$\Psi_{1,-1}$ で表される．摂動 $\mathcal{E} \neq 0$ を加えたときに状態の混成が起こることによって縮退が部分的に解けることを示そう．以下ではこれら4つの状態以外の状態は考えない．

3) $\Psi_{1,1}$ および $\Psi_{1,-1}$ は $\Psi_{0,0}, \Psi_{1,0}$ と混成を起こさずエネルギー固有状態のままである．その理由を前問2)に注意し説明せよ．

以下では，2つの状態 $\Psi_{0,0}$ と $\Psi_{1,0}$ の線形結合 $\alpha_0\Psi_{0,0} + \alpha_1\Psi_{1,0} = \sum_{\ell=0,1}\alpha_\ell\Psi_{\ell,0}$ として書ける状態のみを考える．極座標 $(x, y, z) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ を使うと，

$$\begin{aligned}\Psi_{0,0} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}a_B^{3/2}}\left(2 - \frac{r}{a_B}\right)\exp\left[-\frac{r}{2a_B}\right] \\ \Psi_{1,0} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}a_B^{3/2}}\left(\frac{r}{a_B}\right)\exp\left[-\frac{r}{2a_B}\right]\cos\theta\end{aligned} \tag{4}$$

と書ける．ただし a_B はボーア半径で，以下では a_B を使用してよい．また，$\Psi_{0,0}$, $\Psi_{1,0}$ は規格化されている．

4) 状態ベクトル $\Psi_{0,0}$ と $\Psi_{1,0}$ で張られる２次元線形空間において $V_1 = e\mathcal{E}z$ を演算子として考えると，それは $V_1\Psi_{\ell,0} = \sum_{\ell'=0,1} M_{\ell'\ell}\Psi_{\ell',0}$ となるような２行２列の行列

$$M = \begin{pmatrix} M_{00} & M_{01} \\ M_{10} & M_{11} \end{pmatrix} \tag{5}$$

で表される．この行列の行列要素は

$$M_{\ell'\ell} = \int \Psi^*_{\ell',0} V_1 \Psi_{\ell,0}\, d^3x \qquad (\ell, \ell' = 0, 1) \tag{6}$$

である．この行列 M を求めよ．ただし必要があれば積分公式

$$\int_0^\infty t^n \exp(-t) dt = n! \qquad (n \text{ は非負整数}) \tag{7}$$

を使用してよい．

5) $\mathcal{E} = 0$ のときの状態 $\Psi_{\ell,0}$ のエネルギーを E_0 とする．このときハミルトニアン $H = H_0 + V_1$ を $\Psi_{0,0}, \Psi_{1,0}$ で張られる２次元線形空間で２行２列の行列として表せ．

6) $e\mathcal{E} > 0$ であるような電場を考える．ハミルトニアン H の２つの固有値 $E_\pm$（ただし $E_- < E_+$）を求め，またそれらの固有値に対応する規格化された波動関数 $\Psi_\pm$ を $\Psi_{0,0}$ と $\Psi_{1,0}$ の線形結合として表せ．

7) 状態 Ψ_- において，L^2 を測定したとき $L^2 = 0$ を得る確率 P を求めよ．

問題5 (熱・統計力学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ.

[1] 理想気体に関する以下の問いに答えよ．問3) の自由膨張過程以外は準静的過程とする．また，熱量の符号は気体が吸収する場合を正，仕事の符号は気体が外部にする場合を正とする．

1) 1 mol の気体について図1のサイクルを考える．状態1での体積 V は V_1，圧力 P は P_1 であり，状態1から体積 V_2 の状態2まで等温過程で膨張する．また，状態2から状態3までは定圧過程，状態3から状態1までは定積過程である．気体の内部エネルギー U は体積 V に依存せず，温度 T だけの関数 $U(T)$ である．

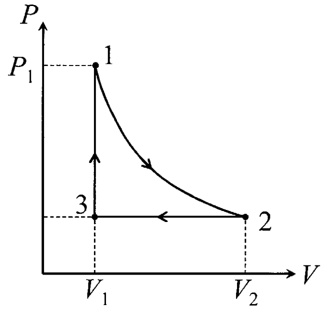


図 1

   a) 下式のように変化量を1サイクルにわたって積分すると0となる物理量 X は何か．気体が吸収する熱量 Q，気体の内部エネルギー U，気体が外部にする仕事 W の3つの中から答えよ．答のみでよい．

$$\oint_{1231} dX = 0 \tag{1}$$

   b) 上式 (1) を具体的に計算し，$C_P = C_V + R$ を導け．ここで，R は気体定数，C_P は定圧モル比熱，C_V は定積モル比熱である．その際，状態変数としては状態1での温度 T_1 および状態3の温度 T_3 を使用するとよい．

   c) 等温過程 (状態 $1 \to 2$) における気体のエントロピーの変化 ΔS_{12} を，P_1, V_1, V_2, R のうち必要なものを用いて表せ．

2) 1 mol の気体について，図2の2つのサイクル A（状態 $1 \to$ 2a $\to$ 2b $\to 4 \to 1$）と B（状態 $1 \to$ 2b $\to 4 \to 1$)）を考える．過程 a（状態 $1 \to$ 2a）は等温過程，過程 b（状態 $1 \to$ 2b）は断熱過程，過程 c（状態 2a $\to$ 2b）は定積過程，過程 d（状態 2b $\to 4$）は定圧過程，過程 e（状態 $4 \to 1$）は定積過程である．1サイクルにおいて，気体が吸熱過程で吸収する熱量の和を Q^{in} とし，気体がする正味の仕事を W^{total} とする．

a) サイクル A, B について，それぞれの仕事 $W_{\mathrm{A}}^{\mathrm{total}}$, $W_{\mathrm{B}}^{\mathrm{total}}$ の大小関係を P-V グラフと関連付けて簡潔に答えよ．

b) サイクル A, B について，それぞれの吸熱量 $Q_{\mathrm{A}}^{\mathrm{in}}$, $Q_{\mathrm{B}}^{\mathrm{in}}$ を，$P_1, V_1, V_2, C_V, \gamma$ のうち必要なものを用いて表せ．ここで，$\gamma = C_P/C_V$ である．

c) 図 2 の過程 a∼e の中で，気体のエントロピーが減少する過程をすべて答えよ．答のみでよい．

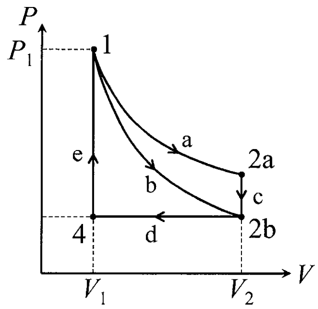


図 2

3) 最後に，自由膨張過程も含めて考える．

図 3 のように壁で内部が仕切られた箱があり，温度 T_1 の気体が体積 V_1 に閉じ込められていた．自由膨張は，この壁が外れることで気体が真空中へ（自由に）膨張する過程である．理想気体ではこの過程で外部との熱の出入りがない．

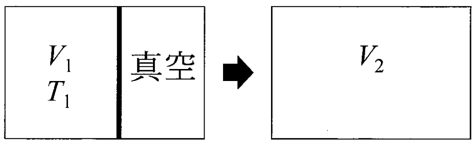


図 3

a) 理想気体では自由膨張過程の前後で温度はどのように変化するか．熱力学第一法則を使って，増加，減少，一定の 3 つの中から答えよ．

b) 1 mol の理想気体が，問 2) で考えた図 2 の状態 1 から体積 V_2 の状態へ自由膨張したとき，自由膨張後の状態は，状態 2a または状態 2b のどちらと一致するか答えよ．

c) 問 3)b) の自由膨張過程における気体のエントロピーの変化を，P_1, V_1, V_2, C_V, C_P のうち必要なものを用いて表せ．

d) 図 2 の状態 1 から体積 V_2 の状態への，以下の 4 つの膨張過程のうち，気体のエントロピーが最も増加するのはどの過程か答えよ．またそのときの増加量を，P_1, V_1, V_2, C_V, C_P のうち必要なものを用いて表せ．
(1) 自由膨張，(2) 断熱膨張，(3) 等温膨張，(4) 定圧膨張．

[2] 多数の電子からなる系が温度 T の熱浴に接している．それぞれの電子は原子に束縛されており，原子は互いに区別可能である．系の温度は十分低いため，各電子はエネルギー $E=0$ の基底状態またはエネルギー $E=\epsilon$ （ϵ は正の定数）の第一励起状態のいずれかにのみ存在しうるとする．以下では電子のみに着目し，電子以外の原子の状態は考えない．ボルツマン定数を k_{B}，逆温度を $\beta=1/k_{\mathrm{B}}T$ とする．またプランク定数を h とし，$\hbar=h/2\pi$ とする．

1) 原子が N 個あり，それぞれが 1 個の電子を持つとする．N 個の電子からなる系の熱的性質について以下の問いに答えよ．なお，この問題では電子のスピンについては考えなくてよい．

   a) 1 個の電子の分配関数 Z_1 を求めよ．

   b) N 個の電子からなる系の分配関数 Z を求めよ．

   c) 系の内部エネルギー U を求めよ．

   d) 系の熱容量 C を求めよ．

2) 次に N 個の原子のそれぞれが 2 個の電子を持つとする．1 個の原子に属する 2 個の電子のスピンをそれぞれ $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$ とする．電子は大きさ $\hbar/2$ のスピンを持つフェルミ粒子であることに注意し，$2N$ 個の電子からなる系の熱的性質について以下の問いに答えよ．

   a) はじめに，電子間の相互作用は無視できるものとする．

      i. 1 個の原子に属する 2 個の電子からなる部分系の分配関数 Z_2 を求めよ．

      ii. $2N$ 個の電子からなる系の分配関数 Z を求めよ．

      iii. 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の外部磁場があるとき，各原子のハミルトニアンのうちスピンに依存する部分は $\mathcal{H}_S=\mu\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2)/\hbar$ で与えられる．ここで μ は正の定数である．z 軸の正の向きに磁束密度 B の磁場をかけたときの系の磁化 M を求めよ．ただしスピン以外の原因によって生じる磁化は考えなくてよい．結果は B のかわりに $b=\beta\mu B$ を用いて表せ．

   b) 次に，各原子が持つ 2 個の電子の間にハミルトニアン $\mathcal{H}_I=-K\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2/\hbar^2$ （K は正の定数）で表される相互作用がある場合を考える．異なる原子に属する電子の間の相互作用は無視してよい．外部磁場がないときの，$2N$ 個の電子からなる系の分配関数 Z を求めよ．