

平成31年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期2年の課程入学試験

# 物 理 学 専 攻

筆 記 試 験 問 題

《平成30年8月20日(月)・21日(火)実施》

## 問題 1 (基礎数学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ.

[1] 以下の問いに答えよ.

- 1) 半径  $a$  の球面の内部を考え, 中心からの距離を  $r$  とする. 以下の積分を直交座標から極座標に直し, 積分範囲を明記して計算せよ. ただし, 座標変換にともなうヤコビアン の導出については記載しなくてよい.

$$\iiint_{r \leq a} \frac{1}{r^2} dx dy dz$$

- 2) 以下の行列の全ての固有値を求めよ. また, 対応する全ての独立な固有ベクトルを, 互いに直交する単位ベクトル (正規直交基底) の形で求めよ.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

[2]  $i$  を虚数単位,  $x, y$  をともに実数として, 複素平面  $z = x + iy$  上の複素関数の微分と積分について, 以下の問いに答えよ.

- 1) 複素関数  $f(z)$  を実関数  $u(x, y), v(x, y)$  を用いて以下のように表す.

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

また, その複素微分を以下のように定義する.

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta h) - f(z)}{\Delta h}$$

$f(z)$  が微分可能なとき,  $\Delta h = \Delta x + i\Delta y$  をどの方向から 0 に近づけても極限值は等しくなることに留意し,  $\Delta x = 0$  と  $\Delta y = 0$  の 2 つの場合について上記の極限操作を行うことで,  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$  の間の関係式を求めよ.

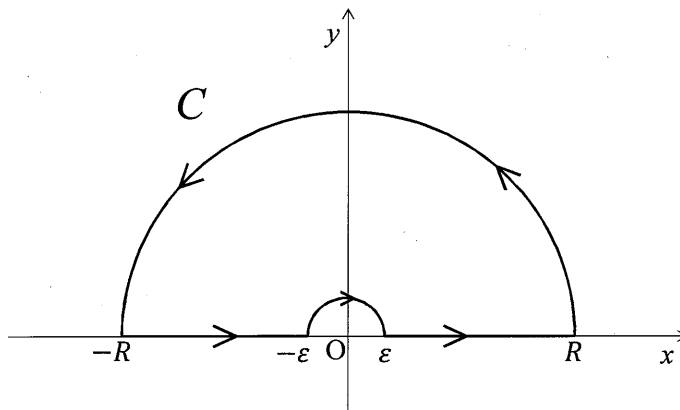
- 2) 下図に描かれた閉じた経路  $C$  は, 実軸上の 2 つの直線部分, 半径  $R$  と  $\varepsilon$  の 2 つの半円 ( $R > \varepsilon > 0$ ) からなる. この経路  $C$  での積分

$$I = \oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz$$

を利用して,

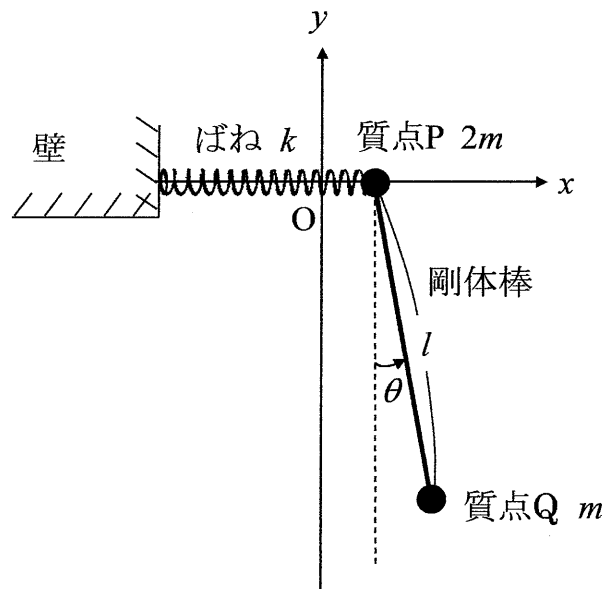
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

を求めよ. ただし, 全ての積分経路について計算過程も記すこと.



## 問題2 (力学)

下図に示すばねと振り子からなる装置を考えよう。Oを原点として水平方向に $x$ 軸，鉛直上向きに $y$ 軸をとる。ばね(ばね定数 $k$ )の一端は壁に固定され，反対側の端に質量 $2m$ の質点Pが取り付けられている。ばねと質点Pは， $x$ 軸に沿ってたわむことなく，摩擦なしに運動する。さらに，長さ $l$ の剛体棒と質点Q(質量 $m$ )からなる振り子が，質点Pに取り付けられ，質点Pを支点として $xy$ 平面内で自由に振れるようになっている。ばねが自然長をとるとき，質点Pは原点Oにあるとし，剛体棒が $y$ 軸となす角を図のように $\theta$ とする。また，重力加速度を $g$ とし，ばねと剛体棒の質量は無視できるものとして以下の問いに答えよ。



- 1) 質点Pが座標 $(x, 0)$ にあり，剛体棒の角度が $\theta$ であるとき，質点Qの座標 $(X, Y)$ ，及びその速度 $(\dot{X}, \dot{Y})$ を， $l, x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}$ のうち必要なものを用いて表せ。
- 2) この装置のラグランジアン $L$ を求めよ。
- 3)  $x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}$ が微小であるとして，問2)で求めた $L$ を， $x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}$ の2次まで展開せよ。

以下の問いでは，ばね定数が $k = \frac{2mg}{l}$ の場合を考える。また， $s = l\theta$ ， $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ とする。

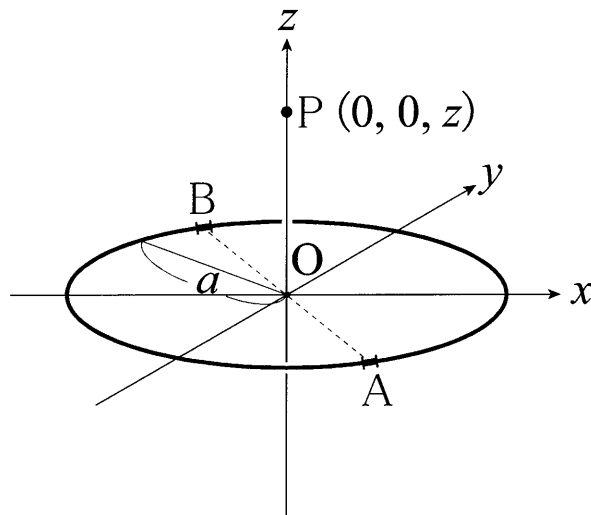
- 4) 問3)の $L$ を用いて， $x$ と $s$ が満たす2個の運動方程式を，それぞれ $s, \ddot{s}, x, \ddot{x}, \Omega$ のうち必要なものを用いて表せ。
- 5) 問4)の運動方程式の解を， $x = A \sin \omega t$ ， $s = B \sin \omega t$ の形に仮定する。ここで， $A, B, \omega$ は定数とする。自明でない解( $(A, B) = (0, 0)$ 以外の解)が存在するように $\omega$ の値 $\omega_1, \omega_2$ を求め，それぞれ $\Omega$ を用いて表せ。ただし， $\omega_1 > \omega_2 > 0$ とする。
- 6) 問5)で求めた $\omega_1, \omega_2$ それぞれに対して， $A$ と $B$ の比を求め， $\theta$ が最大となる時刻での質点PとQの位置を解答用紙の図中に書き入れよ。

### 問題3 (電磁気学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ。

[1] 太さの無視できる絶縁物質で作られた半径  $a$  の円環上に、電荷を線密度  $\rho$  ( $\rho > 0$ ) で一様に分布させた。図のように、中心を原点  $O$  に一致させるように  $xy$  平面上にこの円環を置いた。真空の誘電率、透磁率はそれぞれ  $\epsilon_0, \mu_0$  とし、以下の問いに答えよ。

- 1) 円環の任意の位置  $A$  に長さ  $dl$  の微小区間を考える。この微小区間の電荷が  $z$  軸上の任意の点  $P$ (座標  $(0,0,z)$ ) に作る電場の大きさを求めよ。
- 2) 問1) の位置  $A$  の微小区間と原点  $O$  をはさんで向かい合う位置  $B$  にある同じ長さ  $dl$  の微小区間を考える。  $A$  および  $B$  の両方の微小区間の電荷による点  $P$  での重ね合わせた電場の大きさを求めよ。  $z$  が正負のそれぞれの場合について、その向きも述べよ。
- 3) 円環全体の電荷が、点  $P$  に作る電場  $E$  を求めよ。
- 4) この円環が、  $z$  軸上に作る電場の  $z$  成分 ( $E_z$ ) の概形を  $z$  の関数として解答用紙の所定の場所に図示せよ。ただし、簡単のためここでは  $a = 1, \rho = 1, \epsilon_0 = 1$  とする。
- 5) この円環を  $z$  軸の周りに一定の角速度  $\omega$  ( $\omega > 0$ ) で回転させた。その回転は、  $z$  軸の正の方向に進む右ねじの回転と同じ向きとする。点  $P$  に生じる磁束密度  $B$  を求めよ。



[2] 図のような完全導体で囲まれた直方体 ( $a > b$ ) の空洞共振器を考える。空洞内では、以下のマクスウェル方程式が成立する。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{E}$  は電場、 $\mathbf{B}$  は磁束密度、 $\varepsilon_0, \mu_0$  はそれぞれ真空の誘電率、透磁率とする。

電場  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$  は  $z$  成分のみを持ち ( $E_x = E_y = 0$ )、 $E_z$  が  $x, y, z, t$  の関数の積  $E_z = X(x)Y(y)Z(z) \sin \omega t$  で与えられるとして、以下の問いに答えよ。ただし、 $\omega$  は角振動数とする。

- 1) 式(1)を用いて、 $Z(z)$  が  $z$  に依存しない定数であることを示せ。
- 2) マクスウェル方程式より電場  $\mathbf{E}$  は波動方程式

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (5)$$

に従う。このとき、以下の微分方程式が成立することを示せ。

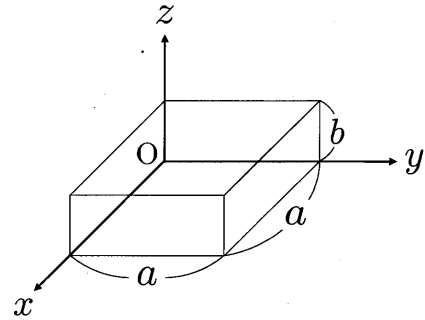
$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \quad (6)$$

- 3) 式(6)が空洞内のあらゆる  $x, y$  に対して成立するとき、左辺の各項は定数とおける。各項を  $-k_x^2, -k_y^2$  ( $k_x, k_y$  は実数) とおき、 $X, Y$  の一般解を求めよ。
- 4) 導体表面では接線方向の電場が0であることを用い、 $E_z$  が以下の式で表せることを示せ ( $E_{z0}$  は定数)。

$$E_z = E_{z0} \sin k_x x \sin k_y y \sin \omega t \quad (7)$$

このとき、 $k_x, k_y$  の取りうる値を求めよ。

- 5) 問4)の結果を用いて、空洞内において共振できる最小の角振動数  $\omega_0$  を求めよ。
- 6) 問5)で求めた角振動数  $\omega_0$  のときの磁束密度  $\mathbf{B}$  を求めよ。



## 問題4 (量子力学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ.

[1]  $x$  軸上において,  $0 < x < L$  では  $V(x) = 0$ , それ以外の位置では  $V(x) = \infty$  となるポテンシャル  $V(x)$  の中に質量  $m$  の粒子が閉じ込められている. この系のハミルトニアンは,  $\hbar = h/2\pi$  ( $h$ : プランク定数) を用いて

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (1)$$

で表される. 上記のポテンシャルに束縛された粒子のエネルギー固有状態に対する波動関数  $\psi(x)$  は,  $0 < x < L$  の範囲で

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad (2)$$

と書ける. ここで,  $A, B, k$  ( $k > 0$ ) は定数である. 以下の問いに答えよ.

- 1)  $n$  を量子数 (正の整数) とし, 固有状態の波動関数  $\psi_n(x)$  およびエネルギー固有値  $E_n$  を求めよ. ただし, 波動関数は規格化すること.
- 2) 求めた固有状態のうち, 第二励起状態 ( $n = 3$ ) における粒子の確率密度の概形を  $x$  の関数として図示せよ. その際,  $0 < x < L$  の範囲で描き, 確率密度の最大値および最小値と, それらの値を取る位置  $x$  を明示すること.
- 3) この粒子の波動関数が

$$\varphi(x) = \begin{cases} C \sin^3 \frac{\pi x}{L} & (0 < x < L) \\ 0 & (x \leq 0, x \geq L) \end{cases} \quad (3)$$

であったとする. 式(3)の波動関数が基底状態 ( $n = 1$ ) および第二励起状態 ( $n = 3$ ) の重ね合わせで表されることを示し, 規格化定数  $C$  を求めよ. さらに, それぞれの状態に存在する確率を求めよ. その際, 以下の公式

$$\sin^3 \theta = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta \quad (4)$$

を用いてよい. また, 異なる固有状態の直交性を証明なしで利用してよい.

- 4) 問3) の波動関数  $\varphi(x)$  で表される状態に存在する粒子のエネルギー期待値を求めよ.

[2] 大きさ  $\hbar/2$  のスピンを持つ同種フェルミ粒子からなる2粒子系を考える. それぞれの粒子の座標を  $\mathbf{r}_1$  および  $\mathbf{r}_2$  とし, この2つの粒子間に  $v(r)$  で表される相互作用がはたらくとする. ここで,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  は2粒子間の相対座標  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  の大きさであり, 相互作用  $v(r)$  は  $\mathbf{r}$  の方向には依存しないとする. 以下では, 2粒子の重心運動は考えないことにし, この2粒子系の波動関数を

$$\Psi = \psi(\mathbf{r}) \Phi_{\text{spin}} \quad (1)$$

と表す. ここで,  $\Phi_{\text{spin}}$  は2粒子系のスピンの状態を表す.  $\mu$  を2粒子間の相対運動に対する換算質量,  $\omega$  を正の定数として, 相互作用が

$$v(r) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 r^2 \quad (2)$$

で与えられているとする. このとき, この系のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + \frac{1}{2} \mu \omega^2 r^2 \quad (3)$$

で与えられる. 以下の問いに答えよ.

- この2粒子系の合成スピン  $\mathbf{S}$  の大きさとして  $S = \hbar$  と  $S = 0$  が考えられる. 合成スピンの大きさ  $S$  およびその  $z$  成分  $S_z$  の同時固有状態は,  $S = \hbar$  に対しては次の3つの状態が存在する.

$$|11\rangle = |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle, \quad |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle], \quad |1-1\rangle = |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle. \quad (4)$$

このとき,  $S = S_z = 0$  となる状態  $|00\rangle$  を式 (4) の表記にならって書け. ただし,  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$  は1粒子に対するスピン演算子の  $z$  成分  $s_z$  の固有関数であり,

$$s_z |\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle, \quad s_z |\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle$$

を満たすものとする. このとき, 式 (4) の状態のそれぞれに対し

$$S_z |11\rangle = \hbar |11\rangle, \quad S_z |10\rangle = 0, \quad S_z |1-1\rangle = -\hbar |1-1\rangle \quad (5)$$

が満たされることに注意すること.

- 質量  $\mu$ , 角振動数  $\omega$  の1次元調和振動子の基底状態および第一励起状態の規格化された波動関数がそれぞれ

$$\phi_0(x) = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}x^2}, \quad \phi_1(x) = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2\mu\omega}{\hbar}} x e^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}x^2}, \quad (6)$$

で与えられることを用いて, 式 (3) で与えられるハミルトニアンの基底状態および第一励起状態の空間部分の波動関数を書け. ただし, スピン自由度以外にエネルギー縮退がある場合には, その全ての波動関数を書くこと.



- 3) 問 2) で求めたそれぞれの状態に対し, 空間反転 ( $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ ) によって波動関数がどのように変換されるか答えよ.
- 4) 粒子の統計性に留意して, この 2 粒子系の基底状態の波動関数の座標依存性およびスピンに関する状態をあらわに書き, そのように書ける理由を述べよ.
- 5) この 2 粒子系の第一励起状態の縮退度を理由とともに答えよ.
- 6) この 2 粒子系の基底状態に,

$$\Delta V = -g(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_1)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_2) \quad (7)$$

で与えられる摂動ハミルトニアンが加わった. ここで,  $g$  は定数であり,  $\mathbf{s}_1$  および  $\mathbf{s}_2$  はそれぞれ粒子 1 および粒子 2 のスピン状態に作用するスピン演算子である.

- a) 1 粒子系に対するスピン状態  $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})|\uparrow\rangle$  を  $|\uparrow\rangle$  と  $|\downarrow\rangle$  の線形結合として表せ. 必要であれば,  $|\uparrow\rangle$  および  $|\downarrow\rangle$  を基底とする表示では状態ベクトルおよびスピン演算子が

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

および

$$s_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

と表されることを用いてもよい. この表示では,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle \quad (9)$$

となることに注意すること.

- b) 1 次の摂動論を用いて,  $\Delta V$  によるこの 2 粒子系の基底状態エネルギーの変化を求めよ. ここで, 必要であれば  $\alpha > 0$  に対する以下の積分公式を用いてもよい.

$$\int_0^\infty r^{2n} e^{-\alpha r^2} dr = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (10)$$

$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1 \quad (11)$$

## 問題5 (熱・統計力学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ.

[1] 以下の問いに答えよ.

1) 単原子分子からなる理想気体を考える. 気体の体積を  $V$ , 圧力を  $P$ , エントロピーを  $S$ , 温度を  $T$ , 気体定数を  $R$ , 物質量を  $n$  モルとする.

a) 物質量が一定の場合の, エントロピーの微小変化  $dS$  について, 以下の熱力学関係式を導け.

$$dS = \frac{3}{2}nR\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V} \quad (1)$$

b) 問1) a) の結果を用いて, エントロピー  $S$  について以下の関係式を導け.

$$S(T, V) = S(T_0, V_0) + nR \ln \left[ \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{V}{V_0} \right) \right] \quad (2)$$

ただし,  $T_0$  および  $V_0$  はそれぞれ基準となる状態の温度と体積である.

c) 図1のように,  $(P, T, V_1)$ ,  $(P, T, V_2)$  なる状態にある2種の理想気体  $n_1$  モル,  $n_2$  モルが, はじめ壁に隔てられて接しているとする. いま, 壁を取り払うと, それぞれの気体は拡散によって混合する. その場合の全系のエントロピー増加  $\Delta S$  を  $n_1, n_2, R$  を用いて表せ. なお, 全系は外界から断熱されているとする.

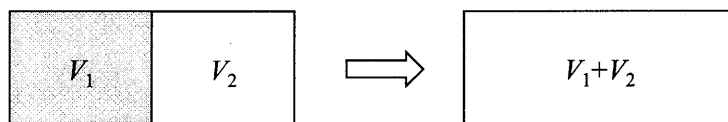


図1

2) ある温度  $T$ , 圧力  $P$  において, 気体 A, B, C が反応式  $A+B \rightleftharpoons C$  の化学平衡状態にある場合を考える. この反応式の左辺を反応系, 右辺を生成系とよぶ. 気体 A の1分子あたりの化学ポテンシャル  $\mu_A$  が

$$\mu_A = \mu_{A0} + k_B T \ln \left( \frac{P_A}{P_0} \right) \quad (3)$$

と与えられるとする. ここで,  $\mu_{A0}$  は標準圧力 ( $P_0 = 1 \text{ atm}$ ) における1分子あたりの化学ポテンシャル,  $k_B$  はボルツマン定数,  $P_A$  はAの分圧である. 気体 B, C に対しても同様に,

$$\mu_B = \mu_{B0} + k_B T \ln \left( \frac{P_B}{P_0} \right) \quad (4)$$

$$\mu_C = \mu_{C0} + k_B T \ln \left( \frac{P_C}{P_0} \right) \quad (5)$$

が成り立つとする。

- a) 平衡状態におけるギブスの自由エネルギーを考察することで、化学ポテンシャル  $\mu_A, \mu_B, \mu_C$  が満たす式を示せ。
- b) 問2) a) の結果を利用して、次の関係式を導け。

$$K_P = \exp \left( -\frac{\Delta\mu_0}{k_B T} \right) \quad (6)$$

ここで、 $\Delta\mu_0 \equiv \mu_{C0} - \mu_{A0} - \mu_{B0}$ 、および、平衡定数  $K_P \equiv \frac{P_C P_0}{P_A P_B}$  である。

- c) 標準圧力における生成系と反応系の1モルあたりのエンタルピーの差を  $\Delta H_0$  とすると、平衡定数  $K_P$  と  $\Delta H_0$  には、

$$\left( \frac{\partial \ln K_P}{\partial T} \right)_P = \frac{\Delta H_0}{RT^2} \quad (7)$$

の関係が成り立つ。なお、 $\Delta H_0 < 0$  のとき、反応は発熱反応である。また、エンタルピー  $H$  は、 $H = G + TS$  で定義され、 $G$  はギブスの自由エネルギーである。

図2のように、定圧過程で  $\ln K_P$  と  $1/T$  の関係が直線で表されるとき、 $\Delta H_0$  は温度によらず一定である。このとき、A, B から C が生成する反応は発熱反応か吸熱反応かを理由とともに記せ。

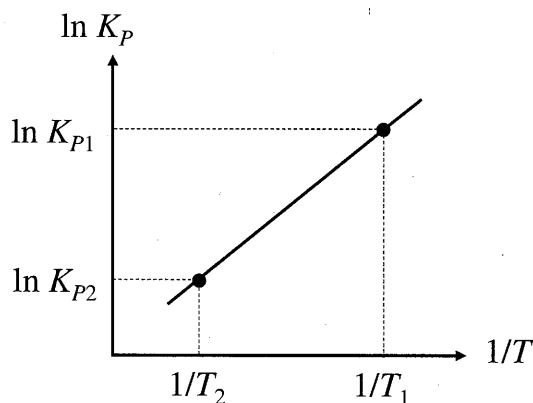


図2

[2] 金属（導体）を熱すると電子が放出される現象を考えよう．図1のように金属の表面を  $xy$  平面 ( $z=0$ ) として金属は領域  $z < 0$ ，外部の電子気体は領域  $z > 0$  を占めるとする．電子の質量を  $m$ ，系の温度を  $T$ ，ボルツマン定数を  $k_B$ ，プランク定数を  $h$  として以下の問いに答えよ．なお簡単のため電子のスピン自由度は無視する．

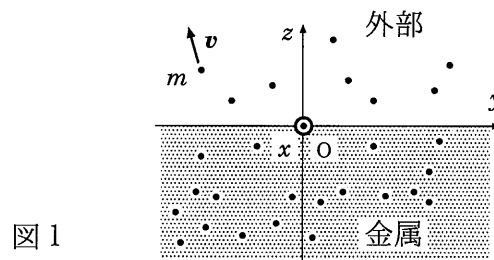


図1

1) 外部の電子気体（以下では外部気体とよぶ）は，ボルツマン分布に従う古典的な理想気体とみなせるとする．その体積を  $V$ ，電子数を  $N$  とする．

a) 外部気体の分配関数  $Z(T, V, N)$  を求めよう．電子の運動量を  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$  として，次の  $\boxed{(\text{ア})}$ ， $\boxed{(\text{イ})}$  に当てはまる式を答えよ．なお電子は互いに区別できないことに注意する．

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{\boxed{(\text{ア})}} \left( \frac{V}{h^3} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \boxed{(\text{イ})} \right)^N$$

b) 問1)a)の積分を実行し，分配関数とヘルムホルツの自由エネルギー  $F(T, V, N)$  を求めよ．必要ならば公式  $\ln N! \simeq N \ln N - N$  および  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$  ( $a$  は正の定数) を用いてよい．

次に気体分子運動論の考え方をを使って外部から金属に入射する電子の数を求めよう．

c) 外部気体中の電子の速度を  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ ，その大きさを  $v$  とする．各速度成分が微小区間  $[v_x, v_x + dv_x]$ ， $[v_y, v_y + dv_y]$ ， $[v_z, v_z + dv_z]$  にある確率が  $f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$  で与えられるとき， $f(\mathbf{v}) = f(v_x, v_y, v_z)$  (速度分布関数) を求めよ．ただし規格化は  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = 1$  によって行うこと．

d) 外部気体から金属に入射する電子の数を単位時間，単位表面積あたり  $R_{\text{in}}$  とする．ある時刻に  $z > 0$  にあり速度  $(v_x, v_y, v_z)$  を持っていた電子が微小時間  $\Delta t$  の間に金属に入射するためには， $z + v_z \Delta t < 0$  が必要である．このことを用いて次の  $\boxed{(\text{ウ})} \sim \boxed{(\text{オ})}$  に当てはまる式または値を答えよ．

$$R_{\text{in}} = \frac{N}{V} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{\boxed{(\text{ウ})}}^{\boxed{(\text{エ})}} dv_z \boxed{(\text{オ})} f(\mathbf{v})$$

e) 問1)d)の積分を実行し， $R_{\text{in}}$  を  $T, V, N$  の関数として表せ．

- 2) 次に金属中の電子を考える。金属中では図2のようにポテンシャルエネルギーが外部より  $W$  だけ低いとする。電子のエネルギー  $\varepsilon$  および化学ポテンシャル  $\mu'$  の基準点をポテンシャルの底に取る。電子のフェルミエネルギーを  $\varepsilon_F$  とすると  $k_B T \ll \varepsilon_F$  かつ  $k_B T \ll W - \varepsilon_F$  であり、金属中の電子を縮退した理想フェルミ気体として扱ってよい。その体積を  $V'$ 、電子数を  $N'$  とする。

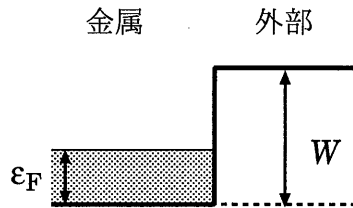


図2

- a) 温度  $T$ 、化学ポテンシャル  $\mu'$  において、エネルギー  $\varepsilon$  を持つ1粒子状態の占有率はフェルミ・ディラック分布  $f_{FD}(\varepsilon)$  で与えられる。その表式を書き下せ。
- b)  $T = 0$  および  $0 < k_B T \ll \mu'$  の場合の関数  $f_{FD}(\varepsilon)$  の概形をそれぞれグラフに描け。

速度  $v$  の電子のエネルギーが  $\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2$  であることを用いると、金属中の電子の数密度  $n'$  は次式で与えられる。

$$n' = \frac{N'}{V'} = \left(\frac{m}{h}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f_{FD}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

- c) 電子が金属表面 ( $z = 0$ ) に達したとき、ポテンシャル障壁を越える電子のみが外部に放出される。放出される電子の数を単位時間、単位表面積あたり  $R_{out}$  とする。次の  $\boxed{(カ)}$  ~  $\boxed{(ク)}$  に当てはまる式または値を答えよ。

$$R_{out} = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{\boxed{(カ)}}^{\boxed{(キ)}} dv_z \boxed{(ク)}$$