平成２９年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

物　理　学　専　攻

筆　記　試　験　問　題

《平成２８年８月２２日（月）・２３日（火）実施》

問題1 (基礎数学)

[1]，[2]，[3] は別々の解答用紙に解答せよ.

[1] 以下の問いに答えよ.

1) 次の行列の固有値と，それに対応する固有ベクトルを求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

2) 問 1) の結果を利用して，次の連立微分方程式を満足する $f(t)$ と $g(t)$ の一般解を求めよ.

$$\frac{d}{dt}f(t) = f(t) + 2g(t)$$
$$\frac{d}{dt}g(t) = 4f(t) + 3g(t)$$

3) $f(0) = 1$，$g(0) = 0$ を満たす解を求めよ.

[2] 以下の問いに答えよ.

次の積分 I を考える.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta} d\theta$$

1) 虚数単位を i として，$z = e^{i\theta}$ と置き，I を z についての複素積分で表せ.
ただし，積分経路を方向も含めて複素平面内に図示すること.

2) 積分を実行し，I の値を求めよ.

[3] 1次元の拡散方程式

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (-\infty < x < \infty,\ t \geq 0,\ \kappa > 0) \tag{1}$$

について，以下の問いに答えよ．必要なら公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(y-b)^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (a > 0,\ b:\text{任意の複素数}) \tag{2}$$

を用いてよい．

1) 関数 $u(x,t)$ が $u(x,t) = T(t)e^{ipx}$ (p : 実数, i : 虚数単位) と変数分離できるとき，$T(t)$ を求めよ．

2) 以下の初期条件を満たす解 $u(x,t)$ を求めよ．

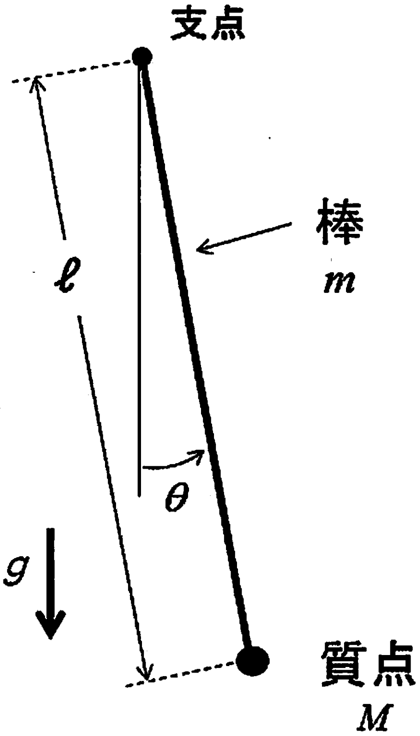
$$u(x,0) = \delta(x) \tag{3}$$

ここで，$\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である．

3) 問 2) の結果に対して，関数 $u(x,t_1)$ と $u(x,4t_1)$ を，横軸を x として同一のグラフ上に図示せよ．また，これらの関数の最大値の比を示せ．ただし，$t_1 > 0$ とする．

問題2 (力学)

右図の様に, 質量 M の質点が, 長さ ℓ, 質量 m の変形しない棒により支点につながれている. この振子の重力の下での運動（重力加速度 g）について, 以下の各問に答えよ. ただし, 鉛直方向からの棒の傾き角を θ とし, 振子は支点を中心として紙面内でなめらかに動けるとする.



まず, 棒の質量 m が無視できる場合 $(m = 0)$ を考える.

1) この振子のラグランジアン L_0 を示せ.

2) L_0 に対するラグランジュ方程式から, 振子の微小振動の角振動数 ω_0 を求めよ.

3) 振子が微小角 $\theta = \theta_0$ $(\ll 1)$ で静止している状態から振子運動を始めたとする. このとき, θ を時間の関数として表せ. また, 振子の力学的エネルギーが時間によらないことを示せ.

次に, 棒の質量 m が無視できない場合を考える.

4) 棒の支点の周りの慣性モーメントを I として, この振子のラグランジアン L_1 を示せ.

5) L_1 に対するラグランジュ方程式から, 振子の微小振動の角振動数 ω_1 を求めよ.

6) 棒の支点周りの慣性モーメント I を積分計算により求め, その値を代入した ω_1 を示せ.

7) 棒と質点の質量比 m/M によって ω_1 は変化する. $m/M \to 0$, $m/M \to \infty$ の極限における ω_1 の値をそれぞれ求めるとともに, $0 < m/M < \infty$ における ω_1 の変化の概略を, 縦軸 ω_1, 横軸 m/M のグラフとして示せ.

振子が十分な運動エネルギーを得て, 支点の周りに時計回りの回転運動をしているとする. ちょうど質点が支点の真下を通過した瞬間に支点から振子が外れたとする.

8) 振子が支点から外れた後の運動の様子を定性的に説明せよ. また, $M = m$ とした場合の, 運動の概略図を示せ.

問題3 (電磁気学)

[1], [2] はそれぞれの指定解答用紙に解答せよ.

[1] 図1のように z 軸上に置かれた無限に長い直線電流に周波数 f, 最大値 $I_p(>0)$ のサイン波形の交流電流が流れている. その値を計測するために, 図のように環のまわりに細い電線を均等に巻きつけたコイルを作り, 環の中心軸が z 軸と一致するように置く. 電流の符号は紙面裏から表への向きを正とする. 環の断面は一辺 d の正方形, コイルの総巻き数は N であり, 環の半径 a は環の断面の中心と z 軸との距離で定義し, $d \ll a$ が成り立つ. コイルの巻き始めと巻き終わりは開放されており, 一端Gを基準として起電力を測定する. なお, 周波数 f が十分低いため, 変位電流の効果は考えなくてよい.

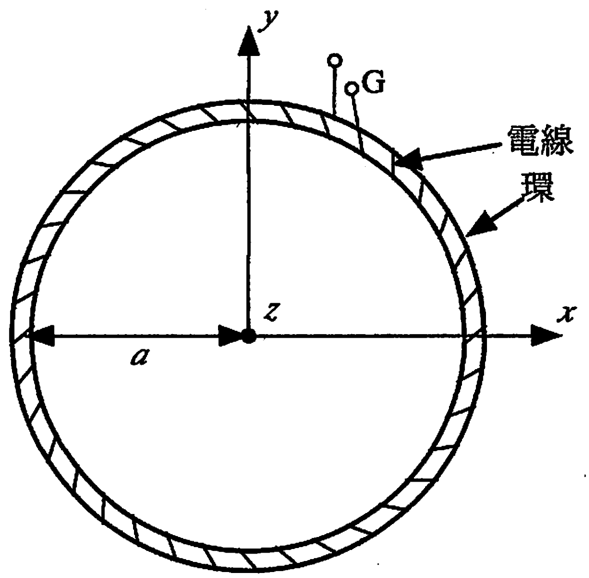


図1

最初に環の透磁率が真空の透磁率 μ_0 と同じ場合を考える.

1) 交流電流 $I(t)$ が最大値 I_p を取る瞬間において, 環の断面の中心における磁束密度 $B_a(=\mu_0 H_a)$ と a の関係式を記せ. ここで t は時間である.

2) 問1) において環の断面を貫く磁束 Φ と B_a の関係式を記せ.

3) 交流電流によりこのコイルに生ずる起電力 $V(t)$ を t の関数として式で表し, 解答欄に図示せよ. 作図にあたっては起電力の最大値がグラフの縦軸の最大値に一致するようにせよ.

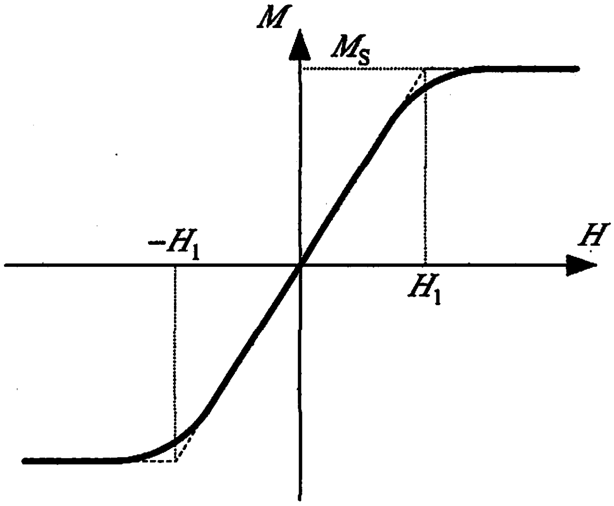


図2

次に環を透磁率が真空に比べて非常に大きな磁性体で置き換える．この磁性体の磁化 $M(H)$ は図2のようなヒステリシスのない磁化曲線を示し，その形は周波数 f の交流磁場の下でも変わらない．低磁場側と高磁場側の磁化曲線を直線的に延長して交わる磁場を H_1 とする．また，一般的に $B = \mu_0 H + M(H)$ が成立する．

4) 図2において $|H| \ll H_1$ のとき，環の断面を貫く磁束 Φ を磁場 H，M_S，H_1 を用いて表せ．

5) 上記の結果を用いて，交流電流によりこのコイルに生ずる起電力 $V(t)$ を式で表せ．ただし，電流の振幅が小さく，環に加わる磁場が $|H_a| \ll H_1$ の領域にあるものとする．

6) 次に，電流の振幅が大きく，$|H_a| > H_1$ の領域に達する場合を考える．交流電流が環の断面の中心に作る磁場の最大値が $2H_1$ となる条件において，環の断面を貫く磁束の時間変化 $\Phi(t)$ を解答欄に図示せよ．作図にあたっては磁束の最大値がグラフの縦軸の最大値に一致するようにせよ．

7) 問6) においてコイルに生じる起電力 $V(t)$ を，問6) と同じ解答欄に図示せよ．作図にあたっては起電力の最大値がグラフの縦軸の最大値に一致するようにせよ．

8) 環に磁性体を用いる場合と用いない場合の感度の差および大電流を測定するときの注意点について 100 字程度で議論せよ．

[2] 図のような直交座標系 xyz において $z>0$ に媒質 0 が，$z \leq 0$ に媒質 1 がある．真空の誘電率を ε_0 とするとき，以下の問いに答えよ．

はじめに媒質 0 を真空，媒質 1 を導体とした系を考える．点電荷 $q(>0)$ は $(0,0,d)$，$d>0$ に固定されているものとする．

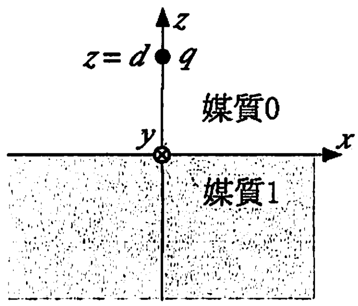


図1

1) xz 平面内の電場の様子を，始点終点の振る舞いに注意して電気力線で表せ．

2) 媒質 0，媒質 1 それぞれにおける電場 $\mathbf{E}_0(x,y,z)$ と $\mathbf{E}_1(x,y,z)$ を式で表せ．

3) 導体表面における電荷分布 $\sigma(x,y)$ を求めよ．

次に媒質 1 を誘電率 ε_1 の一様な誘電体でおきかえる．

4) 媒質 0 における電場は $(0,0,d)$ にある電荷 q と $(0,0,-d)$ においた鏡像電荷 q' のつくる電場の合成であるとして $\mathbf{E}_0(x,y,z)$ を式で表せ．また媒質 1 の電場 $\mathbf{E}_1(x,y,z)$ は $(0,0,d)$ に電荷 q'' があるときに生じる電場であると仮定して式で表せ．

5) 媒質 0 と媒質 1 の界面では境界条件 $\mathbf{E}_{0\parallel}=\mathbf{E}_{1\parallel}$ と $\varepsilon_0\mathbf{E}_{0\perp}=\varepsilon_1\mathbf{E}_{1\perp}$ とが成り立つ．ただし，$\parallel$ と $\perp$ はそれぞれ界面に平行な成分および垂直な成分を意味する．界面 $z=0$ における境界条件から，q' と q'' を求めよ．

6) 問 4) の結果に問 5) で得られた式を代入し，ε_1 を無限大とする極限をとると，問 2) の $\mathbf{E}_0(x,y,z)$ および $\mathbf{E}_1(x,y,z)$ と一致することを示せ．

7) 電荷 q に働く力は鏡像電荷との間に働く力として求められる．電荷 q が真空中 $(0,0,d)$，$d>0$ にあるとき，電荷にかかる力 $\mathbf{F}$ の z 成分 F_z を求めよ．

8) 問 7) とは逆に，電荷 q を誘電体の内部 $(0,0,-d)$，$d>0$ においた場合の F_z を求めよ．

9) 問 7) の状況において，$(0,0,d)$ にある電荷 q 以外の電荷は，実際にはどこに存在しているのか答えよ．さらに，その電荷分布を式で表せ．

問題4 (量子力学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ.

[1] デルタ関数型ポテンシャル $U\delta(x)$ 中における質量 m, エネルギー E の1粒子の運動を考える. U は実数とする. 粒子の波動関数は, シュレディンガー方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+U\delta(x)\right]\psi(x)=E\psi(x) \tag{1}$$

に従う. 虚数単位を i, $\hbar=h/2\pi$ (h はプランク定数) とする. 以下の問いに答えよ.

1) $E<0, U<0$ として, 粒子の束縛状態を考える. このとき, 規格化された波動関数は, $\psi(x)=Ae^{-q|x|}(q>0,\ A>0)$ と与えられる.

   a) 規格化定数 A を, q を用いて表せ.

   b) シュレディンガー方程式の両辺を $x=-\epsilon$ から ϵ まで積分して $\epsilon\to 0$ の極限をとり, 波動関数 $\psi(x)$ の微係数の接続条件を求めよ.

   c) 問 b) の結果を使って, エネルギー固有値を求めよ.

2) 次に, $E>0$ かつ U は正負両方の値をとる場合を考える. 粒子が左側 $(x<0)$ から入射し, デルタ関数型ポテンシャルによって散乱される場合, 波動関数 $\psi(x)$ は以下の形をとる.

$$\psi(x) = e^{ikx}+Be^{-ikx} \qquad (x<0) \tag{2}$$

$$\psi(x) = Ce^{ikx} \qquad (x\geq 0) \tag{3}$$

   a) 任意の点 x における確率流密度は以下の式で与えられる.

$$j(x)=\frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*(x)\frac{d\psi(x)}{dx}-\psi(x)\frac{d\psi^*(x)}{dx}\right) \tag{4}$$

   $x<0$ および $x>0$ における確率流密度 $j_-(x), j_+(x)$ を求めよ.

   b) 波動関数 $\psi(x)$ とその微係数の接続条件から, B と C の値を求めよ. ただし, $\alpha=mU/\hbar^2$ として, α を用いて表すこと. なお, 以降の解答には α を用いてよい.

   c) 粒子の透過率および反射率を, α と k を用いて表せ. U が正負両方の値をとることに注意して, これらの U 依存性の概形を, U を横軸として図示せよ. ただし, 図には, 透過率と反射率が等しくなる U の値を明記せよ.

   d) 透過波は, 入射波に対する位相のずれ ϕ を用いて, $De^{i(kx+\phi)}$ (D は正の実数) と表すことができる. ϕ を求め, その U 依存性の概形を図示せよ. 図には, $U\to\infty, U\to-\infty$ の極限をとった時のそれぞれの位相のずれを明記せよ.

[2] ハミルトニアンが H_0 で与えられる1電子原子について考える．$\boldsymbol{L}$ を電子の軌道角運動量演算子，$\boldsymbol{S}$ をスピン角運動量演算子とする．$\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{S}$ は可換であり，それぞれ角運動量の交換関係 $[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k$, $[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k$ を満たしているとして，以下の問いに答えよ．

1) 全角運動量演算子を $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ とすると，$\boldsymbol{J}$ についても交換関係 $[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k$ が成立することを示せ．

2) $\boldsymbol{J}^2$ および J_z の規格化された同時固有状態を $|j, m\rangle$ とする．$\boldsymbol{J}^2$ の固有値が $j(j+1)\hbar^2$ となることを，以下の式を用いて示せ．

$$J_z|j,m\rangle = m\hbar|j,m\rangle \tag{1}$$
$$J^\pm|j,m\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\hbar|j,m\pm 1\rangle \tag{2}$$

ここで昇降演算子 $J^\pm$ は $J^\pm = J_x \pm iJ_y$ で定義される．

3) 軌道角運動量 $l = 1$ の場合について，$\boldsymbol{L}^2$, L_z および $\boldsymbol{S}^2$, S_z の規格化された同時固有状態を $|m_L, \pm\rangle$ とする．ただし，

$$L_z|m_L,\pm\rangle = m_L\hbar|m_L,\pm\rangle \tag{3}$$
$$S_z|m_L,\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|m_L,\pm\rangle \tag{4}$$

である．$\boldsymbol{J}^2, J_z$ の固有状態 $|j,m\rangle$ を，可能な全ての j, m に対して $|m_L,\pm\rangle$ を用いて表せ．なお，$L^\pm = L_x \pm iL_y$, $S^\pm = S_x \pm iS_y$ についても式 (2) と同等の式が成り立つとして用いてよい．

今，電子の軌道角運動量を $l = 1$ とする．このとき，スピン軌道相互作用の有効ハミルトニアンは正の定数 λ を用いて

$$H_{LS} = \lambda \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S} \tag{5}$$

と表され，この系のハミルトニアンは $H = H_0 + H_{LS}$ と与えられる．

4) $H_0|j,m\rangle = E_0|j,m\rangle$ とする．$|j,m\rangle$ は H の固有状態となっていることを示し，エネルギー固有値とそれぞれの縮退度を求めよ．

5) 問4) で求めたエネルギー固有値が縮退する理由を $\boldsymbol{J}$ と H_{LS} の交換関係に基づいて説明せよ．

6) 次に，この系に z 軸方向に一様な弱い磁場 $B(>0)$ をかける．ハミルトニアンに

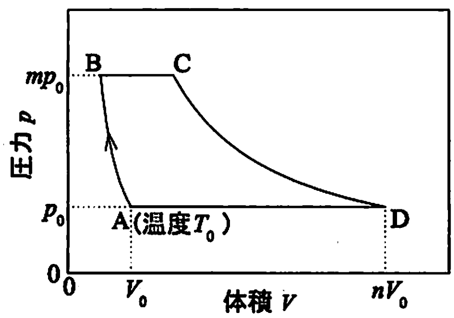
$$H_B = \gamma B(L_z + 2S_z) \tag{6}$$

が加わるとして，スピン軌道相互作用によるエネルギー固有値が磁場によってどのように変化するかを1次の摂動により求め，その様子を横軸を B の大きさ，縦軸をエネルギーとして図示せよ．ただし，γ は正の定数とする．

問題5 (熱・統計力学)

[1], [2] ともに指定解答用紙の指定欄に解答せよ.

[1] 理想気体1モルを用いた図の準静的なサイクルA→B→C→D→Aを考える. A→Bは断熱圧縮, B→Cは定圧膨張, C→Dは等温膨張, D→Aは定圧圧縮である. Aにおける気体の圧力, 体積, 温度をそれぞれp_0, V_0, T_0, Bにおける気体の圧力をmp_0, Dにおける気体の体積をnV_0, 気体の定積モル比熱, 定圧モル比熱をそれぞれC_V, C_p, 比熱比を$\gamma = \dfrac{C_p}{C_V}$, 気体定数を$R$とする. $n > m > 1$であるとし, C_V, C_pは温度によらず一定である. 気体は単原子分子気体とは限らない. 導出過程や考え方も記して, 以下の問いに答えよ.



図：理想気体1モルを用いたサイクル

1) まず一般の気体について, 内部エネルギーの体積依存性を考える. 気体の圧力, 体積, 温度, 内部エネルギー, エントロピー, ヘルムホルツの自由エネルギーを, それぞれ$p, V, T, U, S, F(= U - TS)$とする.

a) 準静的な無限小過程におけるヘルムホルツの自由エネルギーの変化dFを, dT, dVを用いて表し, これを用いてマクスウェルの関係式

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

を導け.

b) 熱力学第1法則と前問1a)の結果から,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

を導け. 次にこれを用いて, 理想気体では内部エネルギーUが体積Vによらないことを示せ.

2) Dの温度T_{D}をT_0, m, n, γの中の必要なものを用いて表し, 次にC→Dで気体が受け取る熱量Q_{CD}を, $T_0, m, n, R, C_V, \gamma$の中の必要なものを用いて表せ.

3) a) 一般に理想気体の準静的な断熱過程では, $TV^{\gamma-1} =$ 一定, $pV^{\gamma} =$ 一定 が成り立つことを, 熱力学第1法則から出発して導け. マイヤーの関係 $C_p = C_V + R$は既知として用いてよい.

b) 前問3a)の結果を用いて, Bの温度T_{B}をT_0, m, n, γの中の必要なものを用いて表し, 次にA→Bで気体がされる仕事W_{AB}を, $T_0, m, n, R, C_V, \gamma$の中の必要なものを用いて表せ.

4) a) A のエントロピーを S_0 とする．D → A 上の任意の点の温度を T とするとき，この点におけるエントロピー $S(T)$ を，T, T_0, S_0, m, n, R, C_V, γ の中の必要なものを用いて表せ．

b) 図のサイクルを，縦軸 温度 T − 横軸 エントロピー S の平面に図示せよ．図は概略でよいが，A, B, C, D に対応する点を図中に記し，サイクルの進行方向を矢印で示せ．

[2] 変位 x，運動量 p，質量 m，角振動数 ω の 1 次元調和振動子の熱的性質を以下にしたがって考察する．温度を T，ボルツマン定数を k_{B}，プランク定数を h とし，さらに，$\beta = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}$，$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ とする．解答に際しては，考え方，計算の過程も記せ．

まず最初に，1 個の調和振動子について考える．ハミルトニアンは

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

である．

1) a) 振動子 1 個について，古典的に状態和 z_c を求めよ．計算には，$a > 0$ に対して $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ となることを用いよ．

   b) 量子論的に考えると，振動子の固有エネルギーが $\epsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$ であることから，状態和 z が $z = \dfrac{1}{2\sinh\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right)}$ となることを示せ．

   c) 問 1b) で量子論を考慮して計算した状態和 z が，高温極限 $k_{\mathrm{B}}T \gg \hbar\omega$ で古典統計の状態和 z_c に一致することを示せ．

2) a) 問 1b) の状態和 z を用い，内部エネルギー $E(T)$ を求めよ．また，高温極限 $k_{\mathrm{B}}T \gg \hbar\omega$ での $E(T)$ の漸近形を示せ．

   b) 熱容量 $C(T)$ を求め，低温極限 $k_{\mathrm{B}}T \ll \hbar\omega$ で $C(T) \sim k_{\mathrm{B}}\left(\frac{\hbar\omega}{k_{\mathrm{B}}T}\right)^2 \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_{\mathrm{B}}T}\right)$ となることを示せ．

つぎに，角振動数 ω が以下の確率分布関数 $P(\omega)$ にしたがって分布して N 個の調和振動子の集団を考える．

$$P(\omega) = \begin{cases} 1/\Omega & (0 \leq \omega \leq \Omega) \\ 0 & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

ここで，Ω は分布の上限の角振動数で，温度によらない正の定数である．

3) a) 問 2b) の結果を用い，低温極限 $k_{\mathrm{B}}T \ll \hbar\Omega$ で，系の熱容量 $C(T)$ が温度 T に比例することを示せ．

   b) 必要ならば問 2a) の結果を用い，前問 3a) で熱容量 $C(T)$ が温度 T に比例する理由を定性的に説明せよ．解答は解答用紙の枠内に記入せよ．