平成２８年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

物 理 学 専 攻

筆 記 試 験 問 題

《平成２７年８月２４日（月）・２５日（火）実施》

問題1 (基礎数学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ.

[1] 以下の問いに答えよ.

1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ について，固有値と固有ベクトルを求めて対角化せよ.

2) 以下の微分方程式について，初期条件 $y(x=0)=1$，$\frac{dy}{dx}(x=0)=2$ を満たす特殊解を求めよ．ただし，結果は虚数単位 i を含まない表式とせよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = e^{2x}$$

3) 複素積分を用いて，次の定積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}dx$$

[2] $x > 0$ の領域で定義された関数 $\Gamma(x)$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \qquad (x > 0) \tag{1}$$

に対して，以下の問いに答えよ．

1) 正の整数 n に対して，$\Gamma(n+1)$ を求めよ．

2) 半径 R の n 次元球の体積 $V_n(R)$ を求めることを考える．ここで次の積分を定義する．

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \tag{2}$$

a) 関数 $e^{-(x^2+y^2)}$ を xy 平面全体で積分し，I を求めよ．

b) n 次元の微小体積素は極座標では以下のように表すことができる．

$$dx_1 dx_2 \cdots dx_n = r^{n-1} dr d\Omega_{n-1} \tag{3}$$

ここで $d\Omega_{n-1}$ は，全ての角度因子のみをまとめた項を示している．
関数 $e^{-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)} = e^{-r^2}$ を n 次元の全空間で積分し，$\int d\Omega_{n-1}$ を $\Gamma(\frac{n}{2})$ を用いて表せ．

c) これまでの結果を用いて体積 $V_n(R)$ を $\Gamma(\frac{n}{2})$ を用いて表せ．

問題2 (力学)

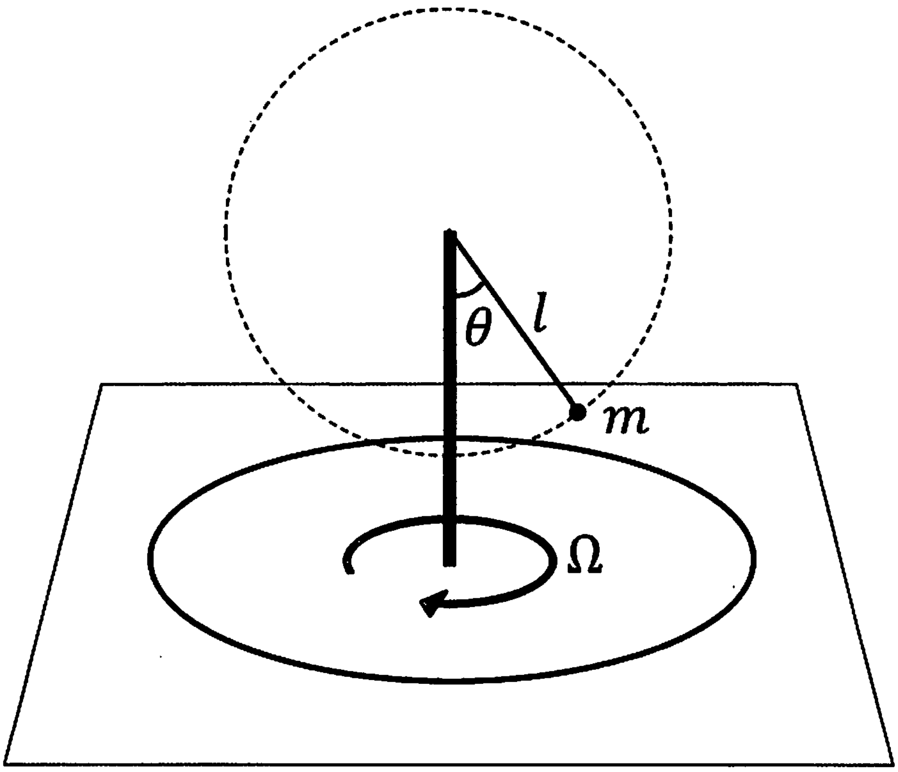
図に示すように，長さ l で質量の無視できる棒の先端に質量 m の質点を付け，棒の他端を支柱に取り付けた振り子がある．支柱は水平面内で回転できる円盤の中心に固定されており，振り子は円盤に固定された鉛直面内を自由に回転運動できる．振り子が鉛直下方に対してなす角度を θ，重力加速度を g とする．

まず，振り子を載せた円盤が回転しない場合を考える．

1) 振り子の運動のラグランジアン（$L = T - V$，T は運動エネルギー，V はポテンシャル）を求めよ．ただし，質点が $\theta = 0$ の位置にあるときのポテンシャルを 0 とする．また，ポテンシャル V のグラフを解答用紙の図に示せ．

2) $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ とする．この ω_0 を使って振り子の運動方程式を表せ．

3) 時刻 $t = 0$ に振り子を最下点 $\theta = 0$ から振り始める．振り子が最上点に達するためには，初期角速度 $\dot{\theta}(t = 0)$ の大きさがある値をこえなければならない．その値を求めよ．



次に，振り子を載せた円盤が角速度 Ω で回転する場合を考える.

4) この場合の振り子の運動のラグランジアン $L(\theta,\dot{\theta})$ を求めよ.

5) この振り子は，問 1) のポテンシャルに円盤を回転させた効果を取り入れた有効ポテンシャルを持つと考えることができる．その有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(\theta)$ をラグランジアンを用いて次式により導入する.

$$L(\theta,\dot{\theta}) = T(\dot{\theta}) - V_{\text{eff}}(\theta)$$

ただし，$T(\dot{\theta})$ は運動エネルギーの $\dot{\theta}$ に依存する部分を取り出したものである．振り子の有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(\theta)$ を求めよ.

以下では，$\omega_0 = \sqrt{g/l} = 1$ とする.

6) Ω が十分に小さいときは，有効ポテンシャルは $\theta = 0$ に安定な平衡点をもつが，Ω を徐々に増加させると，ある角速度 Ω_0 でこの平衡点は不安定化する．この Ω_0 を求めよ．また，$\Omega > \Omega_0$ のときの安定な平衡点の位置（θ の値）を求めよ.

7) $\Omega^2 = 2$ の場合の有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(\theta)$ のグラフを解答用紙の図に示せ.

8) 問 7) の場合において，振り子の最初の位置を $\theta(t=0) = \pi/3$ とする．角速度の初期値 $\dot{\theta}(t=0)$ によって運動はどのように変化するか．$\dot{\theta}(t=0)$ の値によって場合分けして簡潔に述べよ.

問題3 (電磁気学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ.

[1] 内径 a, 外径 b の導体球殻の内部に正の点電荷 q を置いた. 真空の誘電率を ε_0 として以下の問いに答えよ. ただし, 静電ポテンシャルの基準は無限遠とすること.

1) 点電荷 q が導体球殻の中心 O にある場合を考える (図1). ただし, 導体球殻は絶縁されており, 導体球殻の全電荷量はゼロであるものとする.

   a) 導体球殻の中心から距離 $r\,(0 < r < \infty)$ の点における電場の強さ $E(r)$ を求めよ.

   b) 静電ポテンシャル $\Phi(r)$ を求めよ.

2) 次に, 導体球殻を接地し, 点電荷 q を導体球殻の中心から距離 $d\,(< a)$ の点 Q に移動させた.

   a) 導体球殻の内側の面 (中心 O からの距離 $r = a$ の面) において静電ポテンシャル Φ が満たすべき条件を与えよ.

   b) 導体球殻内部 ($r < a$) の電場は導体球殻の中心から距離 $d' = a^2/d$ の点 Q′ に映像電荷 q' を置くことにより求めることができる (図2). 導体球殻の内面上の点 P に対して △OPQ と △OQ′P が相似になることに留意し, 問 2a) で与えた条件が満たされるように q' の値を定めよ.

   c) 導体球殻外部 ($r > b$) の電場を求めよ.

3) 問 1) の状態から, 導体球殻を絶縁したまま点電荷 q を図2の点 Q まで移動させた. このとき, 導体球殻内外 ($r < a$ および $r > b$) の電場はどのようになると考えられるか, 理由とともに答えよ.

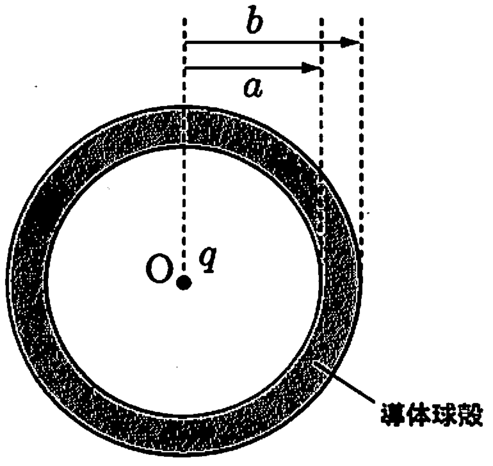


図1

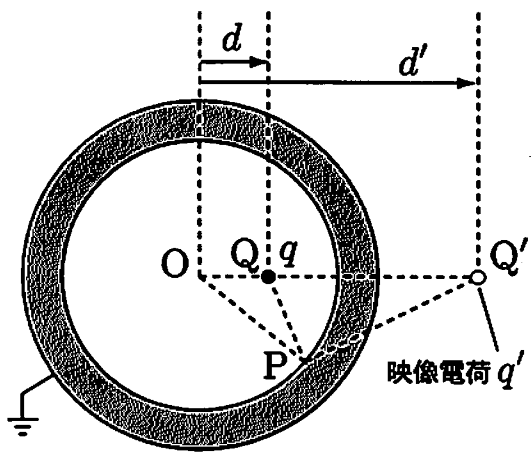


図2

[2] 軸対称な静磁場

$$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z) = (0, 0, B_0) + \beta(-x/2, -y/2, z)$$

を考える．ここで $B_0(>0)$ および β は定数とする．この静磁場中を質量 m, 正の電荷 q をもつ質点が運動する．以下の問いに答えよ．

1) 静磁場 $\mathbf{B}$ について以下の問いに答えよ．ただし $\beta > 0$ とする．

   a) xz 平面 $(y=0)$ における磁力線の概形を $z>0$ の場合に解答用紙の図に描け．

   b) $\mathbf{B} = (0, 0, B_0 + \beta z)$ は静磁場として実現可能かどうか, 物理的な理由とともに述べよ．

2) 質点の位置を (x, y, z) として運動方程式を各成分ごとに書け．

3) 一様磁場 $(\beta = 0)$ の場合を考える．位置 $(x, y, z) = (R, 0, 0)$ から初速度 $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (0, -\omega R, V)$ で質点を運動させたところ, 角振動数 ω で z 軸を周るらせん運動を始めた．ただし, $R>0$, $V>0$ とする．

   a) 運動方程式を使って ω を求めよ．

   b) この質点の円運動（半径 R, 角振動数 ω）は円電流とみなすことができる．円電流の磁気モーメントの大きさ M が次式のように表せることを示せ．

$$M = \frac{1}{2}\omega q R^2 \tag{1}$$

   c) M が以下のように書けることを示せ．

$$M = \frac{K}{B_z} \tag{2}$$

   ここで $K = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2$ は質点の xy 平面内の運動エネルギーを表す．

β が正でかつ十分小さい場合に, 問 3) と同じ初期条件で質点を運動させたところ, 半径がゆっくりと変化するらせん運動を行った．らせん運動の z 方向の速度は徐々に減少し, $z = z_0$ で質点は z 軸の負の方向へ折り返した．

4) β が十分小さい場合には M が保存量となる．このことを用いて z_0 の値を求めよ．

問題4 (量子力学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ.

[1] 質量 m の粒子がポテンシャル $m\omega^2x^2/2$ (ω: 正の定数) の中で x 方向に運動する系を考える. 位置演算子を x, 運動量演算子を p, 虚数単位を i, $\hbar = h/2\pi$ (h: プランク定数) とする. 以下の問いに答えよ. 必要であれば, 以下の公式を用いてよい.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-A\xi^2\right)d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{A}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \exp\left(-A\xi^2\right)d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{A^3}} \qquad (A: \text{正の定数})$$

1) 位置演算子と運動量演算子の交換関係 $[x, p] = i\hbar$ を用いて, 演算子

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega x + ip), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega x - ip)$$

の間には交換関係 $[a, a^\dagger] = 1$ が成立することを示せ.

2) 系のハミルトニアン $\mathcal{H}_0$ を x, p を用いて表し, それを a, $a^\dagger$ を用いて書き直せ.

3) $\mathcal{H}_0$ の基底状態の波動関数 $\psi_0(x)$ は $a\psi_0(x) = 0$ を満たす. $\psi_0(x)$ が $\mathcal{H}_0$ の固有関数であることを示し, そのエネルギー固有値を求めよ.

4) $\psi_0(x)$ を求めよ. ただし, $\psi_0(x)$ は規格化されているとする.

次に, 粒子が電荷 q をもっている場合を考え, ある時刻に一様な電場 $\mathcal{E}$ を $+x$ 方向に印加する (q, $\mathcal{E}$: 正の定数). 電場を印加する前に荷電粒子は $\mathcal{H}_0$ の基底状態にあり, 電場を印加することで波動関数は変化しないとする.

5) 電場が存在するときの系のハミルトニアン $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ を x, p を用いて表せ. ただし, 静電ポテンシャルは $x = 0$ でゼロとする.

6) 電場を印加した後に荷電粒子が $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ の基底状態に観測される確率を求めよ.

7) 荷電粒子に電場を印加した後のエネルギーの揺らぎ ΔE (不確定性) を求めよ.

[2] 3次元空間において，球対称なポテンシャル $V(\boldsymbol{r}) = V(r)$ によって束縛されているスピンをもたない質量 m，エネルギー E の粒子について考える．シュレディンガー方程式は極座標 $\boldsymbol{r} = (r, \theta, \phi)$ を用いて下記のように書ける．以下の問いに答えよ．

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right\} + V(r)\right]\varphi(\boldsymbol{r}) = E\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

1) 波動関数を $\varphi(\boldsymbol{r}) = r^{-1}\chi_l(r)Y_l(\theta,\phi)$ (l は軌道角運動量量子数であり，0または正の整数) とおき，シュレディンガー方程式 (1) を動径部分と角部分に分離する．角部分の方程式が

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]Y_l(\theta,\phi) = -l(l+1)Y_l(\theta,\phi) \tag{2}$$

と書けることを用いて動径部分 $\chi_l(r)$ の方程式を示せ．

2) 球対称ポテンシャルが以下のように与えられたとき，原点における境界条件に留意して，$l=0$ の場合のエネルギー準位を求めよ．ただし，a は正の定数とする．

$$V(r) = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \infty & (r > a) \end{cases} \tag{3}$$

3) 波動関数の角部分 $Y_l(\theta,\phi)$ に関して，以下の問いに答えよ．

a) 軌道角運動量量子数が l のときのエネルギー固有状態の縮退度はいくつか．(答えのみでよい)

b) $l=1$ の場合の縮退している波動関数の一つは $Y_l(\theta,\phi) = A\cos\theta$ (A: 定数) と書ける．$l=1$ に属する他の独立な波動関数 $Y_l(\theta,\phi)$ を与えよ．

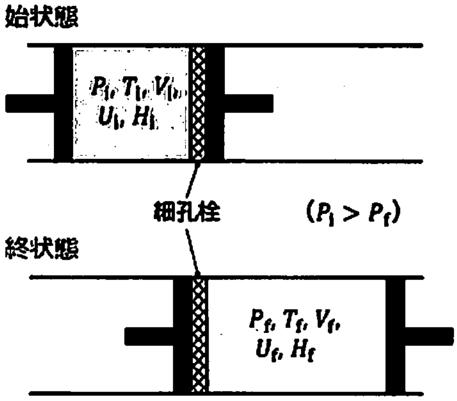
次に，2個の同一種類のスピン1/2のフェルミ粒子が，式 (3) のポテンシャルによって束縛されている状態を考える．粒子間の相互作用は無視できるとする．1個のスピン1/2の粒子の場合は，基底状態が $l=0$，第一励起状態が $l=1$ となる．

4) この2粒子系における基底状態の縮退度および全角運動量の大きさを求め，理由とともに述べよ．

5) この2粒子系における第一励起状態の縮退度はいくつか．理由とともに述べよ．

問題5 (熱・統計力学)

[1], [2] ともに指定解答用紙の指定欄に解答せよ.



[1] 図のように，小さい穴が多数開いており気体が通り抜けられる栓（細孔栓）で仕切られたシリンダーに気体が入っている．左右のピストンにそれぞれ一定の力を加えて，気体を細孔栓の左側から右側に押し出す．このような過程を Joule-Thomson (JT) 過程と呼ぶ．始状態，終状態における，気体の圧力，温度，体積，内部エネルギー，エンタルピー（$H = U + PV$）を，それぞれ P_i, T_i, V_i, U_i, H_i および P_f, T_f, V_f, U_f, H_f とする（ただし $P_i > P_f$）．細孔栓はシリンダーに固定されており，ピストンは滑らかに動く．系は全体として断熱されている．導出過程や考え方も記して，以下の問いに答えよ．

1) a) 始状態と終状態の内部エネルギーの差 $\Delta U = U_f - U_i$ を，P_i, V_i, P_f, V_f を用いて表せ．

   b) 問 1a) の結果を用い，JT 過程が等エンタルピー過程（$H_i = H_f$）であることを示せ．

以下では，$\Delta P = P_f - P_i \to 0$ の無限小過程を考える．

2) エンタルピー H を温度 T と圧力 P の関数と考え，一般に等エンタルピー過程では

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = -\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T}{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P}$$

であることを示せ．

3) 問 2) の $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H$ を JT 係数と呼ぶ．JT 係数が正のとき，終状態での気体の温度は始状態より低くなるので，JT 過程により気体は冷却される．JT 係数を求めるため，まず一般の過程について考察する．

   a) 熱力学第一法則を用い，定圧熱容量が $C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$ で与えられることを示せ．

   b) S を気体のエントロピーとする．Maxwell の関係式 $\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ を用いて，

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P + V$$

   を導け．

問 2) に問 3a), 3b) を用いると，JT 係数が

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{1}{C_p}\left[T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - V\right]$$

で与えられることがわかる．この結果を，状態方程式

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

に従う van der Waals 気体に適用する．ここで R は気体定数，a, b は気体に依存して決まる正の定数である．以下では，体積 V が十分大きいとして，状態方程式を

$$P \approx \frac{RT}{V} + \frac{1}{V^2}(bRT - a)$$

と近似してよい．

4) a) 体積 V が十分大きいとき，van der Waals 気体の JT 係数は，X, Y を定数として

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{1}{C_P}\left(\frac{X}{RT} + Y\right)$$

と書ける．X, Y を求めよ．

b) 問 4a) を用いて，JT 過程により van der Waals 気体を冷却するために，始状態の温度 T_{i} が満たすべき条件を求めよ．

[2] スピン間の相互作用が無視できる，アボガドロ数 N_A 個の $S=1$ のスピンからなる系を考える．系のハミルトニアンは

$$\mathcal{H}=\sum_{i=1}^{N_A}\mathcal{H}_i,\quad \mathcal{H}_i=k_B\Delta\cdot S_{i,z}^2$$

である．ここで $S_{i,z}$ は i 番目のスピンの z 成分，Δ は正の定数，k_B はボルツマン定数である．$\mathcal{H}_i$ の固有エネルギー，固有状態は，$S_{i,z}|S_{i,z}=m\rangle=m|S_{i,z}=m\rangle$ $(m=+1,0,-1)$ となる状態 $|S_{i,z}=m\rangle$ を用いて，図 1 のようになる．導出過程や考え方も記して，以下の問いに答えよ．必要ならば $\beta=\dfrac{1}{k_BT}$，気体定数 R を用いてもよい．

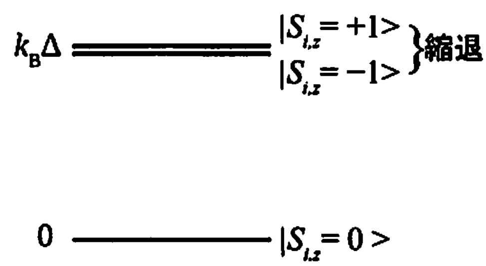


図 1: 磁場 $H=0$ のときの固有エネルギーと固有状態

1) a) 温度 T における系の分配関数 Z を求めよ．

b) 温度 T における系の内部エネルギー $U(T)$ を求めよ．

c) 温度 T における系のヘルムホルツの自由エネルギー $F(T)$ を求めよ．

d) 系の N_A 個のスピンが取り得る場合の数 W を求め，$T\to\infty$ での系のエントロピー $S_0(T\to\infty)$ を求めよ．

z 軸正方向に磁場 H を加えると，μ_B をボーア磁子として，$\mathcal{H}_i$ は

$$\mathcal{H}_i=k_B\Delta\cdot S_{i,z}^2-(-2\mu_BS_{i,z})H$$

となる．$\mathcal{H}_i$ の固有エネルギーは図 2 のように H で変化し，$H_1=\dfrac{k_B\Delta}{2\mu_B}$ で準位交差が起きる．系の磁化は

$$M=\sum_{i=1}^{N_A}(-2\mu_BS_{i,z})$$

である．以下，温度 $T\ll\Delta$ の領域で考え，

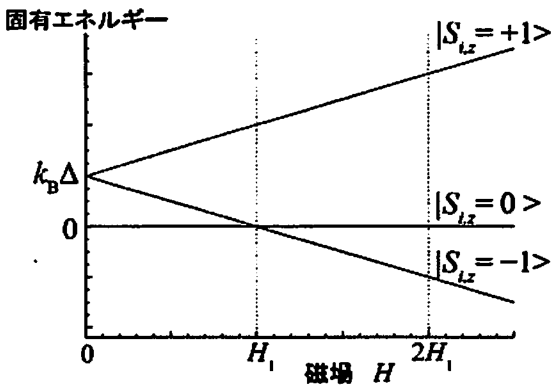


図 2: 固有エネルギーの磁場 H 依存性

かつ問題を簡単化して，エネルギーが最も高い $|S_{i,z}=+1\rangle$ の状態を無視する．

2) a) 温度 T，磁場 H のときの系の磁化 $M(T,H)$ を求めよ．次に，温度 $T=$ 一定のときの磁化過程 $M(H)$ を，$0<T_1<T_2\ll\Delta$ となる 2 つの温度 T_1，T_2 に対し，定性的な特徴，相互の位置関係がよくわかるように，$0<H\le 2H_1$ の範囲で，解答用紙指定欄に図示せよ．

b) 温度 $T=$ 一定 で準静的に磁場を $H=2H_1$ から $H=H_1$ へ下げるとき，系が外部から吸収する熱量 Q を，エントロピーの変化に着目して求めよ．

c) 定性的な考察に基づき，温度 $T=$ 一定 のときの系のエントロピー S の磁場 H による変化 $S(H)$ を，$0<T_1<T_2\ll\Delta$ となる 2 つの温度 T_1，T_2 に対し，問 2a) と同様に図示せよ．図示したようになる理由も記せ．