

平成27年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期2年の課程入学試験

物 理 学 専 攻

筆 記 試 験 問 題

《平成26年8月25日（月）・26日（火）実施》

問題1 (基礎数学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ.

[1] 以下の問いに答えよ.

- 1) 積分 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ を計算せよ. ただし, 領域 D は図1に斜線で示された領域である.
- 2) 関数 $\phi(x, y, z) = 1/r$ について以下の問いに答えよ. ただし, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする.
 - a) $\nabla\phi$ を求めよ.
 - b) 原点 $r = (0, 0, 0)$ 以外の点において $\nabla^2\phi$ を求めよ.
 - c) 原点を中心とする半径 b の球面 S 上で, 面積分 $\iint_S \nabla\phi \cdot \mathbf{n} dS$ を求めよ. なお, 単位法線ベクトル \mathbf{n} の向きは S の外向きにとることとする.
 - d) 問2b) と問2c) の結果を利用して, 原点 $r = (0, 0, 0)$ を含む全領域での $\nabla^2\phi$ を, $\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ を用いて表せ. ただし, $\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ は3次元空間のデルタ関数で

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

により定義される.

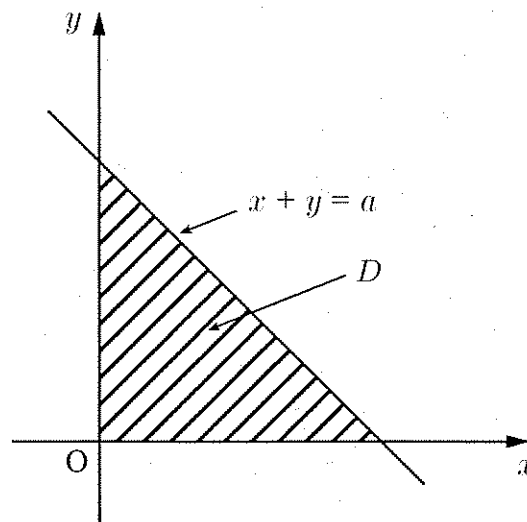


図1

[2] A は 2 次の正方行列, $\mathbf{x}(t)$ は実数変数 t の未知関数を成分とする 2 次元ベクトル

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

として, 以下の微分方程式

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) \quad (1)$$

を考える. この微分方程式の解を得るために, 実数変数 t の関数として, 行列 A の指数関数を以下のように導入する.

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

ただし, $A^0 = E$ (E は 2×2 の単位行列) とする.

1) 上記で定義された指数行列 e^{tA} を使って次に与えられるベクトル

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{c}$$

が方程式 (1) を満足することを示せ. ただし, \mathbf{c} は t に依らないベクトルとする.

2) 行列 A が具体的に $A = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ と与えられたとき, 以下の問いに答えよ.

a) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

b) 問 2a) で求めた固有ベクトルを基底ベクトルとして方程式 (1) の一般解を求めよ.

c) 問 2b) で求めた解について, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t)/x_2(t)$ の値を求めよ.

3) 続いて方程式 (1) に非斉次項 $\mathbf{f}(t)$ を加えた場合

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

を考える.

a) ここで $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{c}(t)$ の形が上記の方程式 (2) の特殊解となるためには, t に依存する 2 次元ベクトル $\mathbf{c}(t)$ が

$$\frac{d}{dt}\mathbf{c}(t) = e^{-tA}\mathbf{f}(t)$$

に従うことを示せ.

b) 問 2) で与えた行列 A に対して, $f_1(t) = 2e^{-3t}$, $f_2(t) = e^{-3t}$ のとき, 方程式 (2) の特殊解を具体的に求めよ.

問題2 (力学)

質量 m の質点がポテンシャル $U(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 - \frac{1}{3}Ax^3$ (ω_0, A はそれぞれ正の定数) の中に置かれている。

- 1) 質点に働く力を求めよ。
- 2) $U(x)$ のグラフを描け。
- 3) $x = 0$ の位置に置かれた質点に初速度 v_0 ($v_0 > 0$) を与えた。質点が $x \rightarrow +\infty$ に移動するために v_0 が満たすべき条件を求めよ。
- 4) 質点が安定な位置の近傍で微小振動するとき、その周期 T を求めよ。
- 5) 角振動数 ω で周期的に振動する外力 $F(t) = f \cos \omega t$ を質点に与えた (ただし、 $\omega \neq \omega_0$ とする)。外力は十分に小さく、質点の位置 x が以下のように f のべきで展開できるものとする。

$$x(t) = f u_1(t) + f^2 u_2(t) + \dots$$

このとき、 x の運動方程式は f のべきごとの運動方程式に分解でき、低次の方程式から順次解いていくことによって、 u_1, u_2, \dots を決定できる。

- a) u_1 が従う運動方程式が

$$m \frac{d^2 u_1}{dt^2} + m\omega_0^2 u_1 = \cos \omega t \quad (1)$$

となることを示せ。

- b) u_2 が従う運動方程式を求めよ。
- c) $u_1 = C \cos \omega t$ (C は定数) が式 (1) の解となるように、 C の値を定めよ。
- d) 問 5c) の解を問 5b) の方程式に代入して得られる u_2 に関する運動方程式を考えよ。 u_2 が共鳴的に増大するような角振動数 ω ($\omega \neq \omega_0$) をその理由とともに答えよ。

問題3 (電磁気学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ。

[1] 2つの点電荷 $+q$, $-q$ からなる電気双極子が真空中にある。 $-q$ の位置から $+q$ の位置に向かう相対ベクトル \mathbf{d} を用いると、電気双極子モーメントは $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ で定義される。ただし、 $p = |\mathbf{p}|$, $d = |\mathbf{d}|$ とする。真空の誘電率を ϵ_0 とし、以下の問いに答えよ。

- 1) 図1のように、 xz 平面内で z 軸から角度 β だけ傾いた電気双極子を原点 O に置き、一様な静電場 $\mathbf{E}_0 = (0, 0, E_0)$ をかけた。静電場 \mathbf{E}_0 中における電気双極子の静電エネルギー U_0 が、次式で与えられることを示せ。

$$U_0 = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0 \quad (1)$$

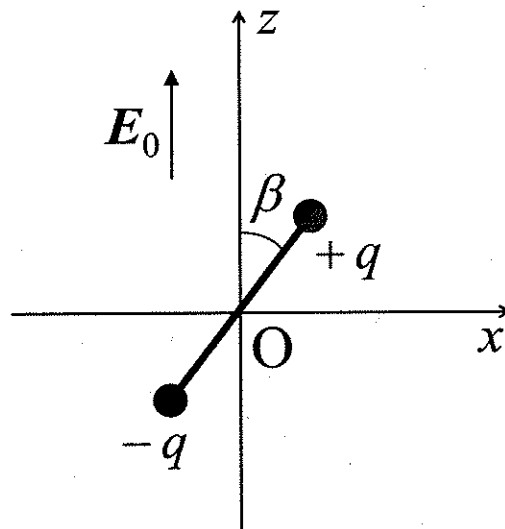


図 1

- 2) $E_0 = 0$ にして, 図2のように, $(0, 0, d/2)$ に $+q$ の点電荷, $(0, 0, -d/2)$ に $-q$ の点電荷を配置した. 位置ベクトル \mathbf{r} で与えられる点Pは, 原点Oから十分に遠い距離 $r = |\mathbf{r}|$ で, z 軸に対して θ の角度をもつ位置にある. 点Pにおける静電ポテンシャル(電位) $\phi(\mathbf{r})$ が, 次式で与えられることを示せ. ただし, $r \gg d$ とし, d/r の2次以上の項は無視せよ.

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2)$$

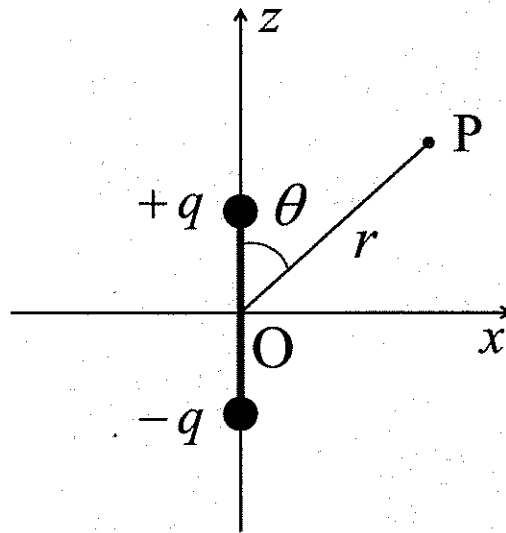


図 2

3) 次に、図3のように、原点Oにある電気双極子を再び xz 平面内で z 軸から角度 β だけ傾けた。また、 $z = -a$ ($a \gg d$) の位置に、 z 軸に対して垂直に無限平面導体板を置いた。ただし、無限平面導体板は接地してある。

- a) $z > -a$ における静電ポテンシャルは、 $z < -a$ に仮想的な電気双極子を考えることで求められる。解答用紙の図に、モーメントの向きが分かるように仮想的な電気双極子(モーメント \mathbf{p}') を記入し、その位置座標も記入せよ。また、そのように記入した理由も簡潔に述べよ。
- b) 電気双極子のもつ静電エネルギー U_1 を、 p, ϵ_0, a, β を用いて表せ。必要であれば、式(2)から得られる以下の電場の式を用いてよい。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left(\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{p} \right) \quad (3)$$

- c) 問3b)の結果を用いて、 a を一定にしたとき、静電エネルギーが最小となる角度 β を求めよ。

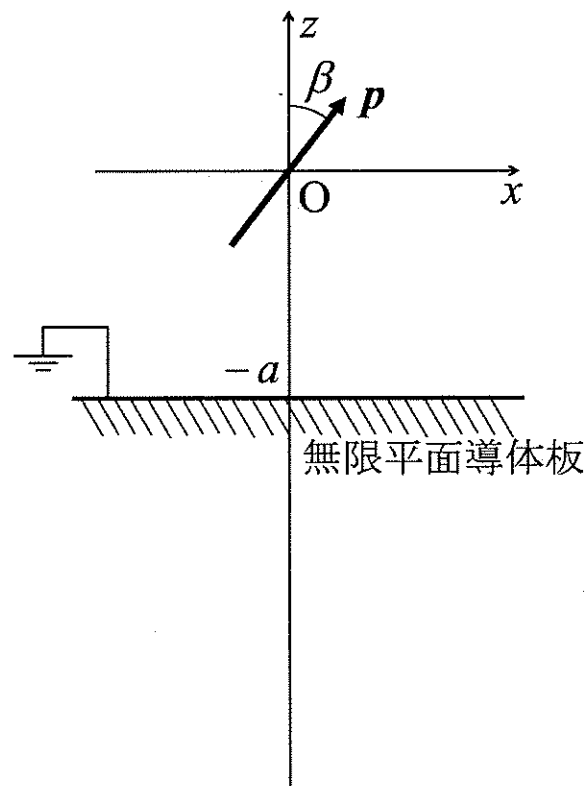


図 3

[2] 図4のように, xy 平面内に置かれた一辺 L の正方形 PQRS の回路に一定の電流 I (向きは $P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow P$ の順) を流す. ただし, 回路の電気抵抗, および自己インダクタンスは無視する. 以下の問いに答えよ.

- 1) この回路に一様な磁場 $\mathbf{B} = (0, B_0 \sin \theta, B_0 \cos \theta)$ (B_0 は正の定数) をかけた. 回路に働く力に関して以下の問いに答えよ.
 - a) 辺 PQ に働く力 F_{PQ} を求めよ.
 - b) 回路全体に働く力 F を求めよ.
 - c) 辺 PQ, QR, RS, SP に働く原点まわりのトルク $N_{PQ}, N_{QR}, N_{RS}, N_{SP}$ をそれぞれ求めよ.
 - d) 回路全体に働くトルクを $N = N_{PQ} + N_{QR} + N_{RS} + N_{SP}$ とする. このとき, 回路の磁気双極子モーメント $\mathbf{m} = (0, 0, L^2 I)$ を用いると, $N = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ と書けることを示せ.

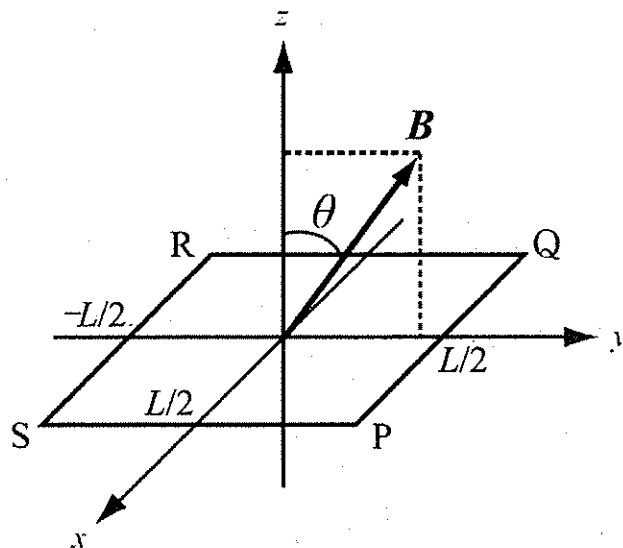


図 4

2) 図5のように、辺PSの中点Mと辺QRの中点Nを結ぶ直線に沿って回路を直角に折り曲げた。回路は直線MNが常に x 軸と一致したまま x 軸のまわりを自由に回転できるとする。このとき回路に一樣な磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ (B_0 は正の定数)をかけた。面MNRSと磁場のなす角度を ϕ として、回路の運動に関して以下の問いに答えよ。

- $\phi = \pi/4$ のとき、回路の磁気双極子モーメントを求めよ。
- 回路の x 軸まわりの慣性モーメントを K として、 ϕ の満たす運動方程式を求めよ。
- 平衡点のまわりに生じる微小振動の周期を求めよ。

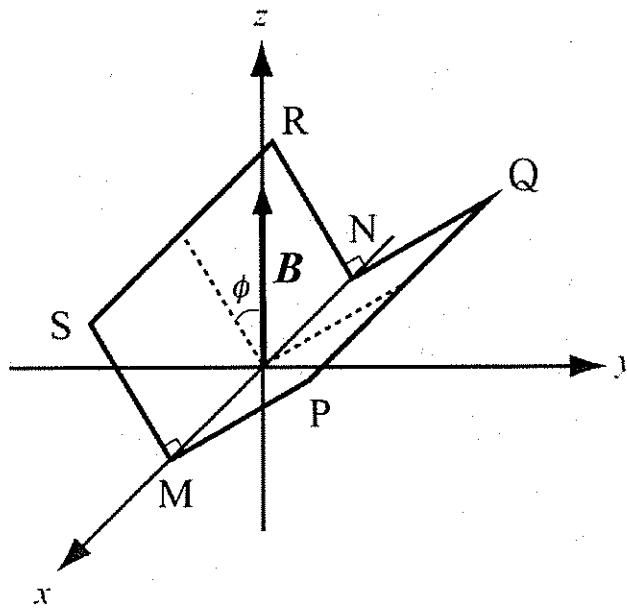


図 5

問題4 (量子力学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ.

[1] 質量 m の電子がポテンシャル $V(z)$ の中を z 方向に沿って運動するとき, その波動関数 $\psi(z, t)$ はシュレーディンガー方程式

$$\mathcal{H}\psi(z, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t}, \quad \mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z)$$

に従う. ただし, i は虚数単位, $\hbar = h/2\pi$ (h : プランク定数) である. x 方向および y 方向の空間運動は考えない. 電子の確率密度 $\rho(z, t)$ および確率流密度 $j(z, t)$ をそれぞれ

$$\rho(z, t) = |\psi(z, t)|^2$$

$$j(z, t) = \frac{\hbar}{2im} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \psi \right)$$

と定義する. ψ^* は ψ の複素共役である. 以下の問いに答えよ.

- 1) 確率密度と確率流密度が以下の方程式を満たすことを証明せよ.

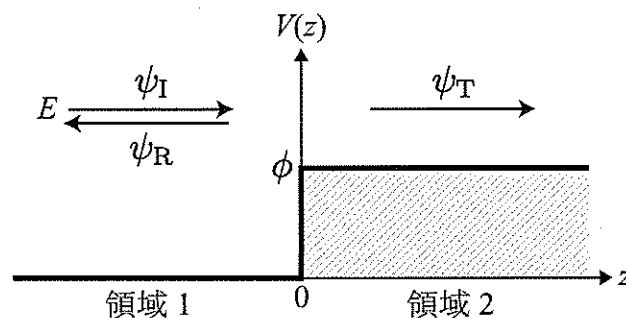
$$\frac{\partial \rho(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(z, t)}{\partial z}$$

- 2) 平面波を重ね合わせた波動関数 $\psi = e^{ikz} + Ae^{-ikz}$ が与える確率流密度を求めよ. ただし, k および A は定数である.

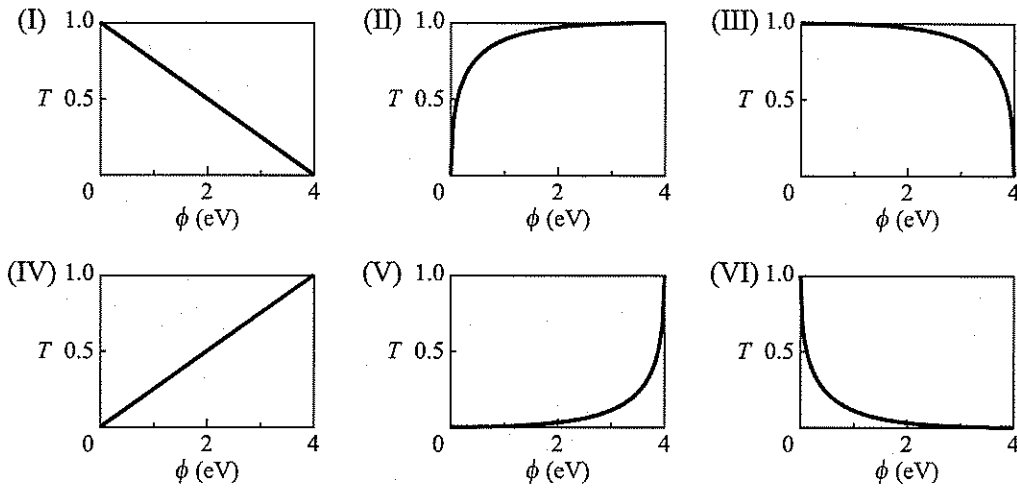
- 3) 下図のように, ポテンシャルが

$$V(z) = \begin{cases} 0 & (\text{領域 1: } z < 0) \\ \phi & (\text{領域 2: } z > 0) \end{cases}$$

で与えられ, 電子が領域 1 から領域 2 に向けて入射する場合を考える (ϕ : 正の定数). 入射波を $\psi_I = e^{ikz}$, 反射波を $\psi_R = Ae^{-ikz}$, 透過波を $\psi_T = Ce^{ik'z}$ とする. k, k', A, C は定数である. 電子のエネルギー E が ϕ よりも大きいときの電子の透過率 T を ϕ, E の関数として表せ. ただし, 透過率は入射波の確率流密度 j_I と透過波の確率流密度 j_T を用いて, $T = j_T/j_I$ と定義する.



- 4) $E = 4 \text{ eV}$ であるとき, 透過率 T は ϕ の関数としてどのようなグラフになるか, 次の (I)-(VI) の中から選べ. その理由も簡潔に述べよ.

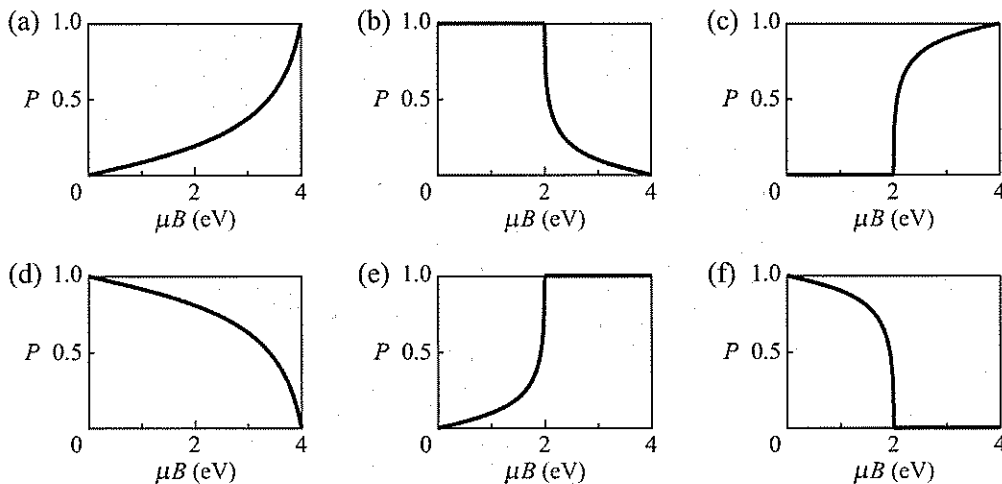


以下では, $V(z)$ に加えて, 領域 2 において磁場 B が存在し, 電子に相互作用 $\mathcal{H}_{\text{int}} = -\mu s \cdot B$ が働く場合を考える. 磁場は z 方向を向いており, $B = B e_z$ と表される (e_z : z 方向の単位ベクトル). μ および B は正の定数とする. s はスピン演算子であり, パウリ行列 σ を用いて $s = \frac{1}{2}\sigma$ と書ける.

- 5) アップスピン電子 ($s_z = +1/2$) の透過率 T_{\uparrow} およびダウンスピン電子 ($s_z = -1/2$) の透過率 T_{\downarrow} を, それぞれ ϕ, E, μ, B の関数として表せ (s_z : s の z 成分). ただし, アップスピン電子, ダウンスピン電子の入射エネルギーは共に $E (> \phi)$ とする.
- 6) 透過電子のスピン偏極率を

$$P = \frac{T_{\uparrow} - T_{\downarrow}}{T_{\uparrow} + T_{\downarrow}}$$

と定義する. $E = 4 \text{ eV}$, $\phi = 3 \text{ eV}$ であるとき, P は μB の関数としてどのようなグラフになるか, 次の (a)-(f) の中から選べ. その理由も簡潔に述べよ.

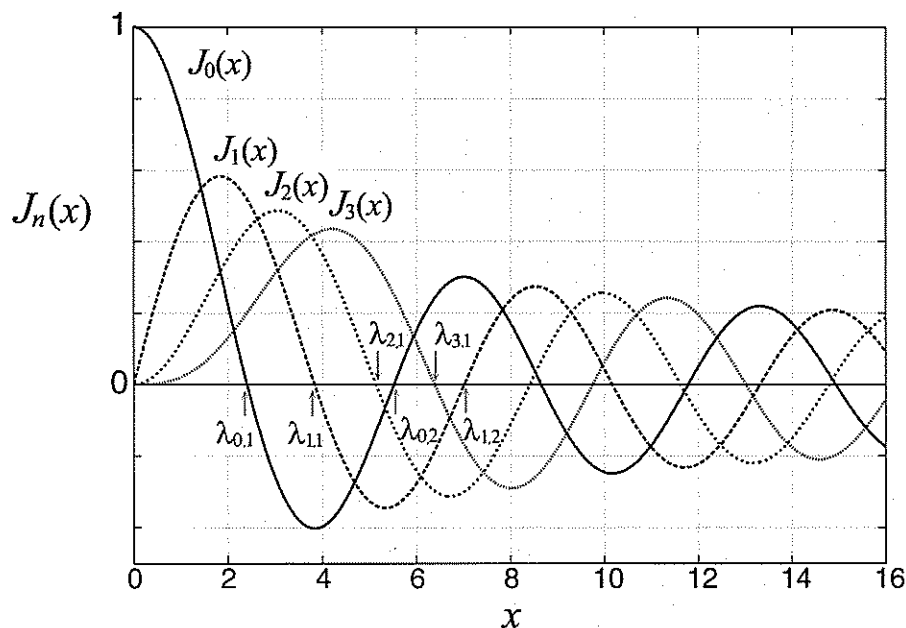


[2] xy 平面内に質量 m の粒子が束縛されている。極座標 ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$) を用いて表現した平面内のポテンシャル $V(r)$ は θ に依存せず, $r < a$ の領域で $V(r) = 0$ であり, それ以外の領域では $V(r) = \infty$ である。 $\hbar = h/2\pi$ (h : プランク定数) として以下の問いに答えよ。

- 1) r, θ を用いて粒子の波動関数を $\Psi(r, \theta)$ のように表したとき, エネルギーを E とする $\Psi(r, \theta)$ が満たす時間によらないシュレーディンガー方程式を記せ。必要であれば $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ の関係を用いてよい。
- 2) 粒子の波動関数を $\Psi(r, \theta) = R(r)\Phi(\theta)$ のように変数分離形で表現したとき, $\Phi(\theta)$ は演算子 $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ の固有関数になることを示せ。また, その固有値は整数 n を用いて表すことができることを示せ。
- 3) 波動関数 $\Psi(r, \theta)$ の r 依存性は, $r < a$ の領域で以下の微分方程式を満たす第 1 種ベッセル関数 $J_n(x)$ によって与えられることを示せ。ベッセル関数 $J_n(x)$ の特徴については下に示すグラフから確認せよ。

$$\frac{\partial^2 J_n(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial J_n(x)}{\partial x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(x) = 0$$

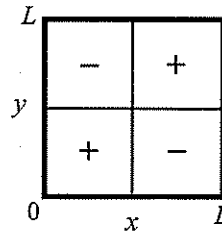
- 4) 下のグラフに示すように, 原点を除いて $J_n(x) = 0$ となる m 番目の x の値を $\lambda_{n,m}$ と定義したとき, 粒子の基底状態のエネルギー E_0 , 第一励起状態のエネルギー E_1 , 第二励起状態のエネルギー E_2 を $\lambda_{n,m}$ を用いて表せ。



- 5) 基底状態, 第一励起状態, および第二励起状態のそれぞれの波動関数 $\Psi(r, \theta)$ について, $\Psi(r, \theta) = 0$ になる xy 平面上のおよその位置を実線で, また, その周辺の $\Psi(r, \theta)$ の符号を+, -の記号を用いて半径 a の円の中に描け. ただし, $\Psi(r, \theta)$ が複素数で表現される場合には, 縮退する独立な状態との線形結合によって, $\Psi(r, \theta)$ を実関数で表現してから答えよ. また, このとき現れる縮退する独立な状態は全て描け. 参考のために, 一辺の長さが L の正方形の場合に対する解答例を下に示す.

正方形の場合の解答例

$$\Psi(x, y) = \sin(2\pi x/L) \sin(2\pi y/L)$$



- 6) a が十分大きいときの $n = 0$ の状態の状態密度 $D_{n=0}(E)$ を求め, 長さ L の一次元の空間に閉じ込められた 1 次元自由粒子の状態密度 $D_{1D}(E)$ との関係を示せ. ただし, 状態密度 $D(E)$ は, エネルギーが E のときの単位エネルギー当たりの固有状態の数であり, $x \gg (n+1)\pi/2$ のときのベッセル関数の漸近形が $J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - n\pi/2 - \pi/4)$ になることを利用してよい.

問題5 (熱・統計力学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ。

[1] 高度上昇に伴う大気の温度降下を以下の手順で考察する。

1) まず地上から高さ z の位置での空気の圧力 $p(z)$ および密度 $D(z)$ について考える。空気は乾燥した理想気体とし、そのモル当りの質量を M とする。気体定数は R とする。

a) $dp(z)/dz = -D(z)g$ を示せ。ここで g は重力加速度である。

b) 理想気体の状態方程式を用いて $D(z)$ を圧力および温度の関数として求めよ。

2) 地表付近の空気は上昇する際に圧力の減少に対応して膨張するが、この過程を準静的断熱膨張と近似することで高度上昇に伴う大気の温度降下を見積もる。以下では 1 モルの乾燥した理想気体の塊を考える。

a) 断熱過程に対する熱力学第一法則を用いて、温度変化率 $dT(z)/dz$ を M, g および定圧モル比熱 C_p で表せ。必要ならば 1 モルの理想気体に対して内部エネルギーの微小変化が $dU = C_V dT$ で与えられることを用いて良い。ここで C_V は定積モル比熱である。

b) 理想気体の定圧モル比熱を温度によらず $C_p = 29 \text{ J}/(\text{mol K})$ とし、さらに $M = 0.029 \text{ kg/mol}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とし、温度変化率の値を求めよ。

3) 実際の空気にはかなりの水蒸気が含まれている。この水蒸気を考慮に入れると、実際の空気の温度変化率の絶対値は上で求めた理想気体のそれより大きくなるか、それとも小さくなるかを答えよ。またその理由を以下に示すキーワードをすべて用いて定性的に答えよ。ただし、地表付近の空気に含まれる水蒸気の分圧はそこでの気温における飽和水蒸気圧以下とする。

キーワード: エントロピー, 相転移, 飽和水蒸気圧。

[2] 1次元上に並ぶ N 個のスピンを考える. スピン σ_j ($j = 1, \dots, N$) は ± 1 の値をとる. 温度を T , ボルツマン定数を k_B として, 以下の問いに答えよ.

- 1) 磁場 H が印加されている. このとき系のエネルギー E は, 磁気モーメントを μ として

$$E = -\mu H \sum_{j=1}^N \sigma_j \quad (1)$$

で与えられる.

- a) 分配関数 Z を求めよ.
 b) 内部エネルギー U を求めよ.
 c) 比熱 C を求めよ.
 d) 次式により定義される相関関数 g_{ij} を求めよ ($i < j$).

$$g_{ij} = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle \quad (2)$$

- 2) 零磁場の下 ($H = 0$), 最近接スピン間に相互作用 $J (> 0)$ が働いている. このとき系のエネルギー E は

$$E = -J \sum_{j=1}^N \sigma_j \sigma_{j+1} \quad (3)$$

で与えられる. ただし, $\sigma_{N+1} = \sigma_1$ なる周期的境界条件があるとする.

- a) 分配関数 Z は, 関係式 $\exp(a\sigma_i \sigma_j) = \cosh a + \sigma_i \sigma_j \sinh a$ (a は定数) を用いて

$$Z = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \prod_{j=1}^N \left(\cosh \left(\frac{J}{k_B T} \right) + \sigma_j \sigma_{j+1} \sinh \left(\frac{J}{k_B T} \right) \right) \quad (4)$$

に変形することができる. この式中のスピンに関する状態和をとり

$$Z = 2^N \left(\cosh^N \left(\frac{J}{k_B T} \right) + \sinh^N \left(\frac{J}{k_B T} \right) \right) \quad (5)$$

となることを示せ.

- b) 熱力学極限 ($N \rightarrow \infty$) において, 分配関数 Z が問 1a) で求めた分配関数と同一の関数形を有することを示し, これを使って比熱 C を求めよ. ただし, $0 < \tanh\left(\frac{J}{k_B T}\right) < 1$ に注意せよ.
 c) スピンの長距離秩序がない場合の相関関数 g_{ij} を求めよ ($i < j$). また, その熱力学極限における値を求めよ.