問題１ (基礎数学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ.

[1] 区間 $[-\pi, \pi]$ で定義され, 区間外では 2π の周期性を持った関数 $g(x)$ に対して

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\}$$

のような表示をフーリエ級数展開, それぞれの係数 a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ をフーリエ係数と呼ぶ.

1) 関数 $g(x)$ のフーリエ係数 a_0, a_n, b_n を区間 $[-\pi, \pi]$ の $g(x)$ を含む積分として表せ.

2) 次の積分

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [g(x)]^2 dx$$

の値を関数 $g(x)$ のフーリエ係数 a_0, a_n, b_n を使って表せ.

3) 関数 $g(x) = \frac{1}{12}(3x^2 - \pi^2)$ （$-\pi \leq x \leq \pi$）のフーリエ係数を具体的に求めよ.

4) フーリエ級数展開の結果を利用して次の無限級数和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

の値を求めよ.

[2] 実変数 x, y の滑らかな関数 $f(x, y)$ について，以下の問いに答えよ.

1) 2 変数関数 f のテイラー展開は以下のように表すことができる.

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x, y) + \Delta\boldsymbol{r}\cdot\nabla f(x, y) + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{r}^T H(x, y)\Delta\boldsymbol{r} + \cdots .$$

ここに，

$$\Delta\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}, \quad \Delta\boldsymbol{r}^T = (\Delta x,\ \Delta y), \quad \nabla f \text{ は } f \text{ の勾配ベクトルであり，}$$

$H(x, y)$ は 2×2 の対称行列（$H^T = H$）である.
$H(x, y)$ の具体的な形を与えよ.（答えのみでよい.）

2) 関数 $f(x, y)$ が，a, b を正の定数として

$$f(x, y) = -\frac{a^2}{2}(x^2+y^2) + \frac{b^2}{2}(x^4 - x^2y^2 + y^4)$$

で与えられているとき，次の問いに答えよ.

a) f の停留点（$\nabla f = \boldsymbol{0}$ となる点）をすべて求めよ.

b) $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ の領域にあるすべての停留点について，H の固有値を求め，f が極値（極大または極小）をとるかどうか判定せよ．また，この領域で f が最小となる点 (x_0, y_0) を求めよ.

c) 問 2b で求めた f の最小点 (x_0, y_0) において，f の曲率が最大となる方向を示せ.

問題2 (力学)

[1] 質量 m の質点が、中心力ポテンシャル $V(r) = -C/r^p$ 中を運動している．ここで，質点は xy 平面内で運動しているとし，極座標 (r,θ) を $\boldsymbol{r} = (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ となるようにとる．また，C, p は定数で $C > 0$ 及び $0 < p < 2$ を満たす．時刻 $t = 0$ における初期条件は，$r = r_0$, $\dot{r} = 0$, $\theta = 0$, $\dot{\theta} = \omega_0$ で与えられる．$(r_0, \omega_0 > 0)$

1) $t = 0$ における質点の運動エネルギーを求めよ．

2) $t = 0$ における質点の角運動量の大きさ L を求めよ．

3) 質点に働く力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ を求めよ.

4) この系のエネルギー E を，$r, \dot{r}, m, C, L, p$ のうち必要なものを用いて表せ．

5) 質点が円軌道を描く場合に，軌道半径 r_c 及び円運動の周期を，C, p, m, L のうち必要なものを用いて表せ．

6) 次に質点の運動が円軌道からわずかにずれた場合を考える．すなわち，r は r_c を中心に振動し，振動の振幅は r_c に比べて微小である場合を考える．このとき，r の変化の周期を C, p, m, L のうち必要なものを用いて表せ．

7) 6) の条件のもとで，質点が原点のまわりを一周したときに軌道が閉じる場合，p が満たすべき条件を求めよ．

問題 3 (電磁気学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ.

[1] 真空中に置かれた半径 a の球殻の面上に，正の電荷 $+Q$ が一様な面密度で分布している．電荷の分布は変化しないものとして以下の問いに答えよ．ただし，真空の誘電率を ε_0 とする．

1) 無限遠方の電位を 0 とする．

   a) 球殻の中心から距離 r における電場の大きさ $E(r)$ を r の関数として求めよ．また，$E(r)$ の概形をグラフに表せ．

   b) 球殻の中心から距離 r における電位 $V(r)$ を r の関数として求めよ．また，$V(r)$ の概形をグラフに表し，$V(a)$ の値を記せ．

2) 図 1 のように真空中に xyz 座標を定め，座標 $(0, 0, D)$ に球殻の中心を置く．また，$z < 0$ の領域を接地された金属で満たす．ただし，球殻は金属表面には接しておらず，また，球殻の面上に分布する正の電荷 $+Q$ は一様な面密度を保っているものとする。

   a) 金属表面上に誘導される電荷の面密度 $\sigma(x, y)$ を求めよ．

   b) 金属表面上に誘導される全電荷の量を求めよ．

   c) 球殻に働く力の大きさと向きを求めよ．

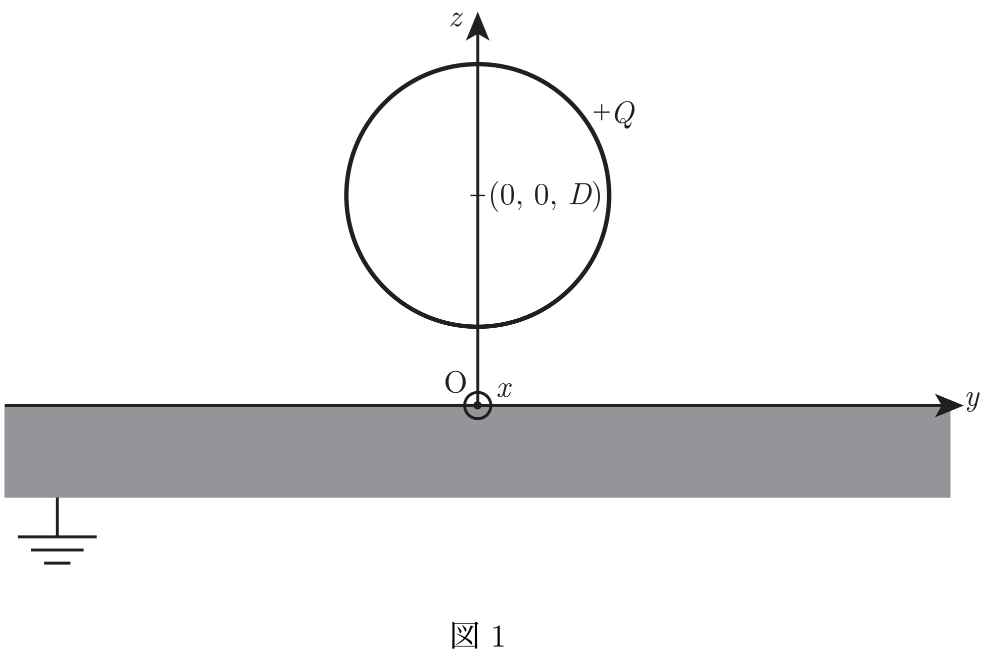

図 1

[2] 図 2 のように，z 軸方向に伝搬し，電場と磁場がそれぞれ x 軸，y 軸方向に振動する電磁波(角振動数ω)を考える．$z<0$ の領域は真空(真空の誘電率ε_0, 真空の透磁率μ_0)であり，$z \geqq 0$ の領域には非磁性な導体 (電気伝導率σ, 誘電率ε, 透磁率μ_0)がある．この電磁波は，導体の表面に対して垂直に入射している．

マックスウェル方程式を以下に示す．ここで，ρ と $\boldsymbol{J}$ は，真電荷密度と電流密度である．導体内部で時間的に変動する電場ベクトルを $\boldsymbol{E}=(E_x, 0, 0), \boldsymbol{D}\ (=\varepsilon\boldsymbol{E})$，磁場ベクトルを $\boldsymbol{H}=(0, H_y, 0), \boldsymbol{B}\ (=\mu_0\boldsymbol{H})$ とし，導体内では $\rho=0$, $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ になることを用いて以下の問いに答えよ．

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \tag{3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{4}$$

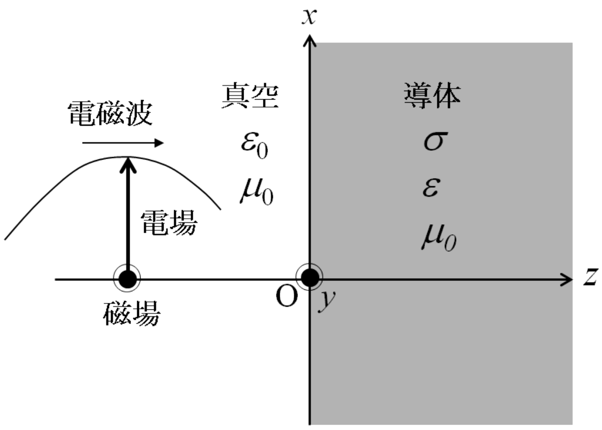

図 2

1)　電磁波が導体内に進入するとき，その電場の振幅がどのように変化するか考える．

a)　式(1)の両辺の回転をとり，導体内における E_x に対する微分方程式を導け．その際，一般のベクトル $\boldsymbol{A}$ について成り立つ $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$ の関係式を用いよ．

b)　問 1a の微分方程式の解を，振幅 E_0，角振動数 ω，波数 k を用いて次式でおく．

$$E_x(z,t)=E_0\exp[i(\omega t-kz)] \tag{5}$$

このとき，k と ω の関係式を導け．

c)　$k=\beta-i\alpha$ とすると，正の実数 α と β はそれぞれ次式で与えられることを示せ．

$$\alpha=\sqrt{\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2+1}-1\right)} \tag{6}$$

$$\beta=\sqrt{\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2+1}+1\right)} \tag{7}$$

d)　電気伝導率が極めて高い導体の場合，$\sigma\gg\omega\varepsilon$ が成り立つ．このとき，振幅の大きさが $E_0\exp(-1)$ に減少する表面からの距離(表皮深さ) L を，ω, μ_0, σ を用いて表せ．

e)　電場の振幅は導体内に進入するとどのように変化するか図示せよ．ただし，横軸を表面からの距離($z\geqq 0$)，縦軸を電場の振幅にとり，E_0, $E_0\exp(-1)$, および問 1d で求めた L を適切な位置に示せ．

2)　電磁波の電場と磁場の位相差が，導体中でどのように変化するか考える．

a)　電場と磁場の間に生じる位相差を θ，振幅を H_0 として，導体中の磁場を，

$$H_y(z,t)=H_0\exp[i(\omega t-kz-\theta)]$$

とおく．この式と式(1)と(5)を用いて，比 E_x/H_y を，$\alpha, \beta, \omega, \mu_0$ を用いて表せ．

b)　問 2a の結果を利用して θ を，α, β を用いて表せ．

問題 4 (量子力学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ.

[1] ここでは $\hbar = 1$ の単位系をとる. 2 個のスピン (大きさ $\frac{1}{2}$) からなる系のハミルトニアンが

$$\hat{H}_\theta = 2I\cos\theta\,\hat{s}_{1z}\hat{s}_{2z} + I\sin\theta(\hat{s}_{1+}\hat{s}_{2-} + \hat{s}_{1-}\hat{s}_{2+}) \tag{1}$$

で与えられているとする. ただし, $I > 0$, $0 \le \theta < 2\pi$ は定数である. $\hat{\mathbf{s}}_n = (\hat{s}_{nx}, \hat{s}_{ny}, \hat{s}_{nz})$ は n 番目のスピンのスピン演算子で, $n = 1, 2$ についてそれぞれ

$$[\hat{s}_{nx}, \hat{s}_{ny}] = i\hat{s}_{nz}\ ,\ [\hat{s}_{ny}, \hat{s}_{nz}] = i\hat{s}_{nx}\ ,\ [\hat{s}_{nz}, \hat{s}_{nx}] = i\hat{s}_{ny}\ , \tag{2}$$

という交換関係を満たし, $\hat{s}_{n\pm} = \hat{s}_{nx} \pm i\hat{s}_{ny}$ である. また, 合成スピンの演算子 $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ を $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2$ とする. $\hat{s}_{nz}$ の規格化された固有状態を $|\uparrow\rangle_n, |\downarrow\rangle_n$ とし, それらは

$$\hat{s}_{nz}|\uparrow\rangle_n = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle_n\ ,\ \hat{s}_{nz}|\downarrow\rangle_n = -\frac{1}{2}|\downarrow\rangle_n\ ,\ \hat{s}_{n-}|\uparrow\rangle_n = |\downarrow\rangle_n\ ,\ \hat{s}_{n+}|\downarrow\rangle_n = |\uparrow\rangle_n \tag{3}$$

を満たす. さらに, スピン系の状態を

$$|\chi_1\rangle = |\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\ ,\ |\chi_2\rangle = |\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2\ ,\ |\chi_3\rangle = |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\ ,\ |\chi_4\rangle = |\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 \tag{4}$$

を用いて表す. 以下の問いに答えよ.

1) $\hat{S}_z$ は $\hat{H}_\theta$ と同時対角化が可能であることを示せ.

2) 4 個の状態 $|\chi_i\rangle, i = 1, \cdots, 4$ の $\hat{S}_z$ の固有値を求めよ.

3) $\theta = 0$ のとき, 4 個の状態 $|\chi_i\rangle$ のエネルギー固有値を求めよ.

4) θ が一般の値のときを考える.

   a) $\hat{H}_\theta$ の行列表示 $\langle\chi_j|\hat{H}_\theta|\chi_k\rangle$ を求めよ.

   b) $\hat{H}_\theta$ の規格化された固有状態を求め, それぞれの状態のエネルギー固有値を θ の関数として表せ.

5) 解答用紙裏面の図はエネルギーを縦軸, θ を横軸としてエネルギー固有値の θ による変化をグラフにしたものである. 既に 2 個の状態についてはグラフに書かれている.

   a) 残りの状態のエネルギー固有値の線を書き込み, グラフを完成させよ. さらに, グラフには $\theta = 0$ のときのエネルギー固有値を記入せよ.

   b) 合成スピンの z 成分の固有値が 0 でない状態が基底状態になる θ の範囲を求めよ.

   c) $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で 3 重縮退が起こる θ の値を求めよ. 縮退が起こる物理的理由を述べよ. また縮退している状態の合成スピンの大きさはいくらか.

[2] 質量 m，電荷 q の粒子が一様な垂直磁場中の x-y 平面内を運動するときの定常状態について考える．ハミルトニアン $\mathcal{H}$ は次のように与えられる．

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left\{(p_x - qA_x)^2 + (p_y - qA_y)^2\right\}$$

p_x, p_y は粒子の座標 x, y に正準共役な運動量演算子で $p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$，$p_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}$ である．垂直磁場 B を表すベクトルポテンシャルを $\mathbf{A} = (0, xB, 0)$ とし，ハミルトニアン $\mathcal{H}$ の固有関数は定数 k を用いて $\Psi(x, y) = e^{iky}\phi(x)$ と表す．以下の問いに答えよ．

1) $\mathcal{H}$ の固有エネルギーを E としたとき，$\phi(x)$ が満たす方程式は

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2m}(\hbar k - qBx)^2\right\}\phi(x) = E\phi(x)$$

となることを示せ．

2) $\underline{k = 0}$ の場合について，以下の a)〜d) の問いに答えよ．

a) $\phi(x)$ が満たす固有値方程式を，次の演算子

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ell\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{\ell}\right) \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\ell\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{\ell}\right)$$

を用いて表現せよ．ただし，$\ell = \sqrt{\hbar/(qB)}$ である．また，a と $a^\dagger$ の間の交換関係と，a，$a^\dagger$ を用いた x の表現を求めよ．

b) この系の基底状態の波動関数 $\phi_0(x)$ とそのエネルギー E_0 を求めよ．

c) 問 b) で求めた $\phi_0(x)$ で表される基底状態において x^2 の期待値 $\langle x^2 \rangle$ を求めよ．

d) $\phi_0(x)$ で表される基底状態と同じエネルギーをもつ古典的粒子が磁場中で角速度 $\omega_c = qB/m$ の円運動を行っているときの軌道半径 r_c を求め，問 c) で求めた x^2 の期待値 $\langle x^2 \rangle$ との関係を示せ．

3) 任意の実関数 $\chi(x, y)$ を用いて $\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\chi(x, y)$ というベクトルポテンシャルのゲージ変換を行ったとき，$\Psi(x, y) \to e^{i\frac{q}{\hbar}\chi(x,y)}\Psi(x, y)$ という位相変換を行うと，$\Psi(x, y)$ が満たす固有値方程式は不変に保たれることを示せ．

4) $\Psi(x, y)$ の最低エネルギーが k に依存しないことを示せ．また，基底状態にこのような縮退が現れる理由を述べよ．

問題 5 (熱・統計力学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ．

[1] 種々の条件下での気体の断熱膨張に関する以下の設問に答えよ．以下では，圧力，体積，温度，内部エネルギーをそれぞれ p, V, T, U で表し，始状態と終状態についてはそれぞれ添字 1, 2 で表す（例：始状態の体積 V_1）．気体定数を R とし，定積モル比熱，定圧モル比熱，それらの比をそれぞれ $C_V, C_p, \gamma = C_p/C_V$ とする．

1) 最初に理想気体の準静的断熱膨張について考えよう．1 モルの理想気体は状態方程式 $pV = RT$ に従い，理想気体の C_V は温度によらず一定とする．

   a) 図 1 に示す断熱されたピストンが理想気体で満たされている（初期状態の体積 V_1）．この理想気体をゆっくりとわずかに膨張（$V_1 \to V_1 + \Delta V$）させたときの内部エネルギーの変化 ΔU を求めよ．

   b) 理想気体の U は V によらない．理想気体に対して $C_p = C_V + R$ を示せ．

   c) 始状態 $[T_1, V_1]$ から終状態 $[T_2, V_2\ (> V_1)]$ まで準静的に膨張させたときの終状態の気体の温度 T_2 を T_1, V_1, V_2 および γ を用いて表せ（準静的断熱膨張）．

2) 次に，理想気体の断熱自由膨張を考えよう．断熱された密閉容器（全体積 V_2）に仕切りを設け，初期状態として片側（体積 V_1）に 1 モル，T_1 の理想気体を満たし，反対側は真空にしておく（図 2）．次に，仕切りを急に取り外すことにより理想気体を真空中に断熱自由膨張させる．このとき理想気体の示す温度変化は上昇，降下，変化無しのいずれか．理由とともに述べよ．

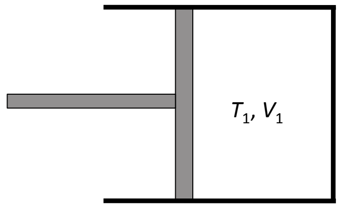

図1

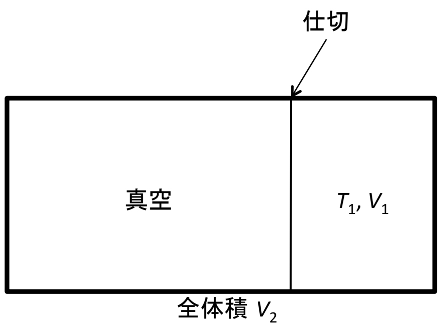

図2

3) より現実に近い気体として van der Waals 気体（1 モル）を仮定し，問2 と同様に，T_1, V_1 の状態から V_2 へと断熱自由膨張するときの系の温度変化を考えよう．1 モル の van der Waals 気体は次の状態方程式に従う．

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \tag{1}$$

ここで，a と b は　van der Waals 定数である．以下では U の体積依存性に関する以下の関係式を用いて良い．

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \tag{2}$$

a) C_V が温度によらないとして van der Waals 気体の内部エネルギーを T, V の関数として求めよ．[ヒント: 内部エネルギーの全微分 $\mathrm{d}U = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V$ を考える．]

b) この van der Waals 気体に対して問 2 と同様の断熱自由膨張を行ったときの終状態の気体の温度 T_2 を求めよ．

[2] ある物質中において, 電子の単位体積当たりの一粒子状態密度 $D(\varepsilon)$ が

$$D(\varepsilon) = \begin{cases} D_0 & (-E_0 \le \varepsilon \le E_0) \\ 0 & (\varepsilon < -E_0,\ \varepsilon > E_0) \end{cases}$$

で与えられているとき, 以下の問いに答えよ. 但しフェルミ分布関数が

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/(k_B T)} + 1}$$

であることを用いてよい. ここで T は温度, μ は化学ポテンシャル, k_B はボルツマン定数である.

1) $T = 0$ のとき, 単位体積当たりの電子数 N と化学ポテンシャル μ との関係を求めよ. 但し $N \le 2D_0E_0$ とする.

2) 以後 $N = D_0E_0$ の場合を考える.

   a) T に依らず $\mu = 0$ となることを説明せよ. （ヒント：状態密度 $D(\varepsilon)$ は $\varepsilon = 0$ に関して対称である.）

   b) 十分に低温 $(k_BT \ll E_0)$ のとき, 電子系全体のもつ単位体積当たりのエネルギー U と比熱 C を求めよ. ただし, 一般に $\mu \ll E_0$ かつ $k_BT \ll E_0$ のとき, なめらかな関数 $X(\varepsilon)$ に対して

$$\int_{-E_0}^{E_0} X(\varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon \approx \int_{-E_0}^{\mu} X(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2(k_BT)^2}{6}X'(\mu)$$

   が成り立つことを用いてよい.

   c) 高温 $(k_BT \gg E_0)$ のとき, 比熱 C を $1/T$ の最低次で求めよ.

   d) これまでの問において, 電子の一粒子エネルギーはスピンに関して縮重しており, 各スピンごとにそれぞれ $D(\varepsilon)/2$ の状態密度を持っていたとする. いまこの系に一様な磁場 H を新たに印加した状況を考える. 電子と磁場との間の相互作用のハミルトニアン $H_{\rm int}$ は

$$H_{\rm int} = -m_0 H\sigma$$

   で与えられるとする. 但し $\sigma = \pm 1$ はスピン変数, m_0 は電子のスピン磁気モーメントの絶対値である。このとき, $T = 0$ における系の磁化率を求めよ.