平成２５年度東北大学大学院理学研究科博士課程前期２年の課程入学試験

物　理　学　専　攻

筆　記　試　験　問　題

《平成２４年８月２７日（月）・２８日（火）実施》

問題 1 （基礎数学）

[1], [2] はそれぞれ別々の解答用紙に解答せよ.

[1]

1) 行列

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ.

2) A^n (n は自然数) を求めよ.

3) 行列 A で表される一次変換 f を考える. すなわち

$$f:(x,y) \to (x',y'), \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である. この変換を n 回繰り返した変換を f^n とする. 原点まわりの単位円の内部のすべての点を, 変換 f^n によって変換した点の集合は, $n \to \infty$ の極限でどんな図形になるか.

[2] は次のページにある.

[2]

1) 常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2a\frac{dy}{dx}+b^2y=0 \quad (a>0,\ b>0,\ a\neq b) \tag{1}$$

の一般解 $y(x)$ を書け．ただし a, b の大きさについて場合分けし，$y(x)$ は最終的に虚数単位 i を使わない形で表現すること．

2) 偏微分方程式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]u(x,t)=0 \tag{2}$$

を以下のようにして解いてみよう．ただし，無限遠方 $|x|\to\infty$ において発散しない解のみを考えることとする．また，ここでは虚数単位 i を使ってもよいものとする．

a) x のみの関数 $X(x)$ と t のみの関数 $T(t)$ を用いて $u(x,t)=X(x)T(t)$ のように変数分離すると，偏微分方程式 (2) は

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}=\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2}=-\lambda \quad (\lambda \text{ は定数}) \tag{3}$$

のように書けることを示せ．

b) 微分方程式 (3) を解いて，$X(x)$ と $T(t)$ を求めよ．その際，$\lambda\geq 0$ でなければならない理由を簡単に説明し，結果は $k=\sqrt{\lambda}$ を用いて表せ．

c) 問 b で得られた解を，さまざまな k について重ね合わせることによって得られる式 (2) の最も一般的な解を書き表せ．(答えのみでよい.)

3) 偏微分方程式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}-2a\frac{\partial}{\partial t}\right]u(x,t)=0 \quad (a>0) \tag{4}$$

について考えよう．ただし，無限遠方 $|x|\to\infty$ において発散しない解のみを考えることとする．

この偏微分方程式も，問 2 で用いた方法と同じ方法（変数分離法）によって解くことができる．そのようにして求めた解が，振幅が時間とともに変化する進行波

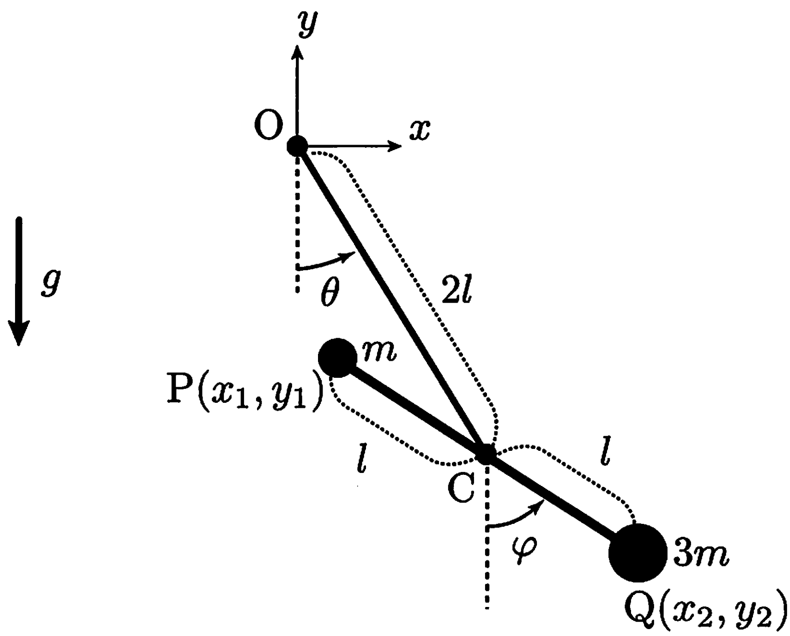
$$u(x,t)=A(t)\,f(kx-\omega t) \qquad (\omega>0)$$

の形をもつとき，波数 k がみたすべき条件を求めよ．また，$\omega(k)$ および $A(t)$ を求めよ．さらに ω を k の関数として図示せよ．

なお，ここでは問 1 の結果を利用してもよい．また，虚数単位 i を使ってもよいものとする．

問題2 (力学)

鉛直平面内に一点 O を取り，O を原点として水平方向に x 軸，鉛直上方に y 軸を取る．長さ $2l$ の棒 PQ の両端にそれぞれ質量 $m, 3m$ の質点を取り付け，棒の中点 C と点 O を別の棒（長さ $2l$）でつなぐ．点 O, C における棒の接続は十分になめらかで，２つの棒は xy 平面内で点 O, C のまわりに自由に回転できるようになっている．この装置の運動について以下の問いに答えよ．なお，２つの棒の変形および質量は無視できるものとし，重力加速度の大きさを g とする．



1) ２つの棒が鉛直下方となす角度をそれぞれ θ, φ とすると質点の座標は次のように表される．

$$(x_1, y_1) = (2l\sin\theta - l\sin\varphi, -2l\cos\theta + l\cos\varphi),$$
$$(x_2, y_2) = (2l\sin\theta + l\sin\varphi, -2l\cos\theta - l\cos\varphi)$$

装置の運動エネルギーを θ, φ およびそれらの時間についての導関数 $\dot{\theta}, \dot{\varphi}$ で表せ．

2) 装置のラグランジアン L を与えよ．

3) 変位 θ, φ およびその導関数 $\dot{\theta}, \dot{\varphi}$ が微小であるとして，問 2 のラグランジアンを $\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ の 2 次まで展開せよ．ただし，$\Omega = \sqrt{g/(2l)}$ とおき，結果の中では g のかわりに Ω を使うこと．

4) 問 3 の近似のもとで，θ, φ が満たす運動方程式を導け．

5) 問 4 の運動方程式の解を $\theta(t) = A\,e^{i\omega t}, \varphi(t) = B\,e^{i\omega t}$ （i は虚数単位．A, B, ω は定数）の形に仮定する．自明でない解（$(A, B) = (0, 0)$ でない解）が存在するように $\omega\,(> 0)$ を定めよ．

6) 問 5 で求めた ω のそれぞれに対してベクトル (A, B) を求めよ．

7) 装置を $\theta = \varphi = 0$ の位置に静止させた状態で，点 Q に x 軸の正の方向を向いた撃力を加えたところ，Q は x 軸の正の方向に向かって速度 $V > 0$ で動き始めた．撃力を加えた時刻を $t = 0$ として，その後の運動を時間の関数として求めよ．ただし，撃力は十分に小さく，運動の間の変位 θ, φ はともに微小であるとする．

問題3 (電磁気学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ．

[1] 真空の誘電率を ε_0 として以下の問いに答えよ．

1) 図1のように，真空中の座標 $(a,0,0)$ の位置に電荷 $+Q$ の点電荷を，座標 $(-a,0,0)$ の位置に電荷 $-Q$ の点電荷を置く．

 a) 二つの電荷 $+Q$, $-Q$ の間の静電エネルギー U を求めよ．ただし，二つの電荷の間の距離が無限大のときに $U=0$ とする．

 b) このとき，xz 平面内での電気力線の概略図を描け．

2) 次に，図2のように，$x \leq 0$ の領域を接地した導体で満たす．

 a) 真空中の座標 $(x,0,0)$ の位置 $(x>0)$ に電荷 $+Q$ の点電荷を置く．このとき点電荷が受ける力 F の向きと大きさを求めよ．

 b) この点電荷を，x 軸上の無限遠 $(x=\infty)$ から座標 $(a,0,0)$ まで，力 F に抗してゆっくりと運ぶのに要する仕事 W を求めよ．

 c) この点電荷が座標 $(a,0,0)$ にあるとき，xz 平面内での電気力線の概略図を描け．

3) 問 1a で求めた静電エネルギー U と問 2b で求めた仕事 W の大きさを比較せよ．また，比較した結果について，その物理的な解釈を簡潔に説明せよ．

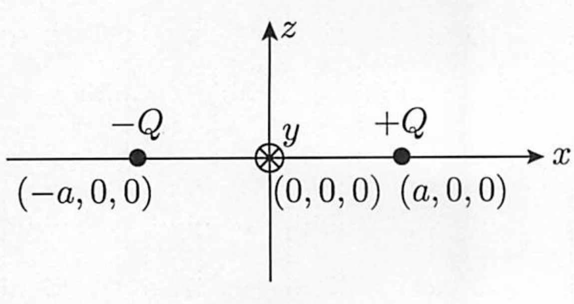


図 1

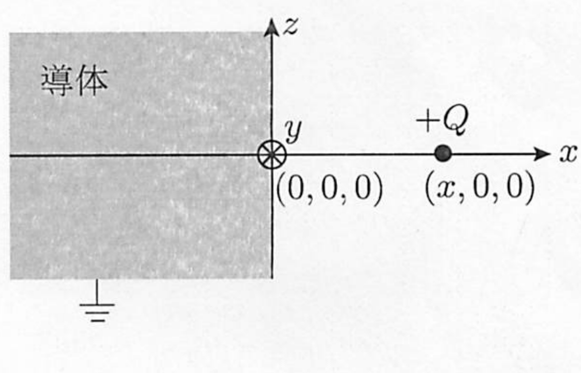


図 2

[2] 図3のように，半径 a，電気抵抗 R の円形コイル C を，中心が原点 O に一致するようにして xy 平面上に固定する．C の向きは，$+z$ 方向から見て反時計回りを正とする．また，磁気双極子モーメント $\boldsymbol{m} = (0, 0, m)$ は z 軸上のみを移動することができる．ここで，m は正の定数である．真空の透磁率を μ_0 とし，円形コイル C の自己インダクタンスは無視できるものとして，以下の問いに答えよ．

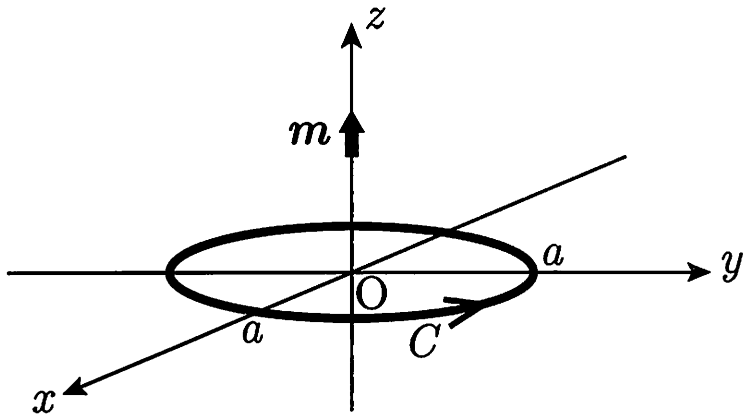


図 3

1) 磁気双極子モーメント $\boldsymbol{m}$ から $\boldsymbol{r}$ だけ離れた位置での磁束密度は，$r = |\boldsymbol{r}|$ として次のように表される．

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3\left(\boldsymbol{m}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\frac{\boldsymbol{r}}{r} - \boldsymbol{m}\right] \tag{1}$$

図4のように，磁気モーメント $\boldsymbol{m}$ が座標 $(0, 0, z)$ にあるとき，$\boldsymbol{m}$ を中心とした球面を円形コイル C で切り取った曲面 S を貫く磁束 $\Phi = \int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS$ を求めよ．このとき，曲面 S の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きは，右ねじを C の向きに回したときにねじが進む向きに取るものとする．

2) 磁気双極子モーメント $\boldsymbol{m}$ を一定の速さ $v = dz/dt$ $(v > 0)$ で z 軸上を移動させる．ただし，時刻 $t = 0$ で $\boldsymbol{m}$ は円形コイル C の中心（原点 O）を通過するものとする．円形コイル C に誘導される起電力 $V(t)$ を求めよ．起電力の向きは，C の向き（$+z$ 方向から見て反時計回り）を正とする．ただし，$\boldsymbol{m}$ が移動する速さは十分に遅く，磁束密度は問1の式 (1) で表されるものとする．

3) 問2のとき，円形コイル C にはジュール熱が発生している．エネルギー保存を考えることにより，磁気双極子モーメント $\boldsymbol{m}$ を一定の速さ v で動かし続けるのに必要な力 $\boldsymbol{F}(t) = F(t)\boldsymbol{e}_z$ を求めよ．ここで，$\boldsymbol{e}_z$ は $+z$ 方向の単位ベクトルである．

4) xy 平面内で円形コイル C を境界に持つ円盤を貫く磁束を計算すると，問1で求めた磁束 Φ と同じ値になる．その理由を簡潔に説明せよ．

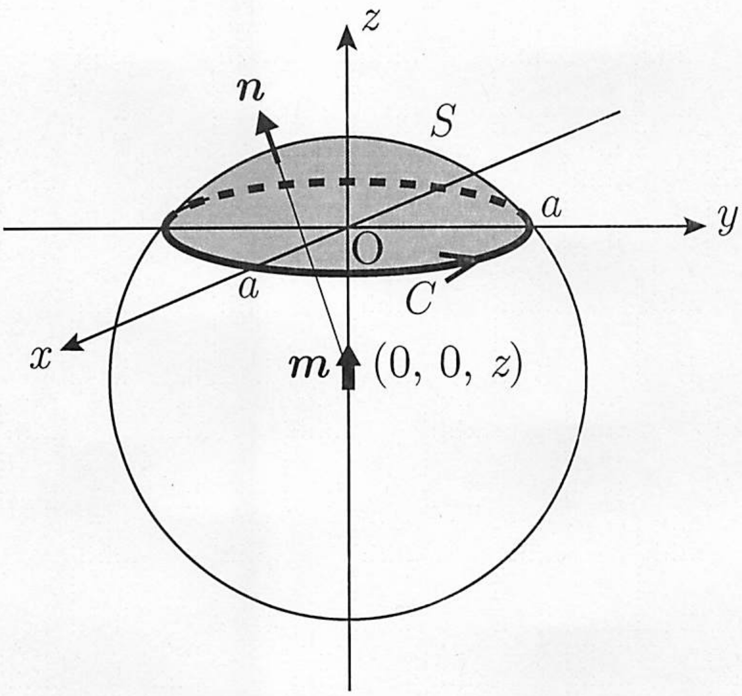


図 4

問題4 (量子力学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ.

[1] 質量が m である1粒子の1次元井戸型ポテンシャル中での運動を考える. ポテンシャルは, 図1のように座標を x として, $V(x) = 0\ (-R < x < R)$, それ以外の x では無限大である. ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)$$

である. ただし, $\hbar = h/2\pi$ (h はプランク定数) とする. 以下の問いに答えよ.

1) 定常状態のエネルギー固有値 E および対応する規格化された波動関数 $\phi(x)$ をすべて求めよ.

2) 問1で求めた波動関数のうち, 基底状態の波動関数を $\phi_g(x)$, 第一励起状態の波動関数を $\phi_e(x)$ とする. それぞれの x に対する粒子の存在確率を図示せよ.

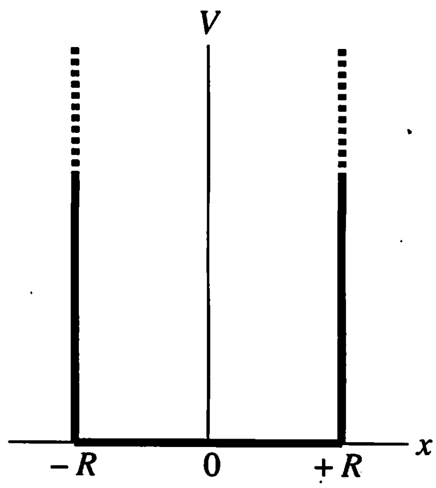


図 1

次に, 同じ質量 m を持つ相互作用のない2個の粒子が図1のポテンシャル中で運動をする場合を考える. 粒子1および2の座標をそれぞれ x_1, x_2 と表すと, 2粒子系のハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_1^2} + V(x_1) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_2^2} + V(x_2)$$

で与えられる. このとき, 2粒子系の波動関数 $\Phi(x_1, x_2)$ は, 1粒子波動関数の積の重ね合わせで書くことができる. 以下の問いに答えよ.

3) 2個の粒子が共に基底状態 ϕ_g (エネルギー E_g) を占めるとき, 波動関数は $\Phi_a(x_1, x_2) = \phi_g(x_1)\phi_g(x_2)$ である. この状態のエネルギー固有値を求めよ.

4) 2個の粒子が, それぞれ ϕ_g (エネルギー E_g) と ϕ_e (エネルギー E_e) の異なる状態を占める場合を考える. 2個の粒子の入れ替えに関して対称な規格化された波動関数 $\Phi_b(x_1, x_2)$, および反対称な波動関数 $\Phi_c(x_1, x_2)$ を, ϕ_g と ϕ_e を用いて記せ. また, これらの状態のエネルギー固有値を求めよ.

[2] 大きさ $\hbar/2$ のスピンをもつフェルミ粒子のスピンに関する波動関数（以下，スピン関数と呼ぶ）は，スピン演算子の z 成分 s_z の規格化された固有関数 α, β である．ただし，

$$s_z\alpha = \frac{\hbar}{2}\alpha,\ s_z\beta = -\frac{\hbar}{2}\beta.$$

以下では，フェルミ粒子２個のスピンの合成を考える．粒子１のスピン関数を α_1, β_1 とし，粒子２に対してはそれぞれ α_2, β_2 とする．またそれぞれのスピン演算子を $\boldsymbol{s_1}$, $\boldsymbol{s_2}$ とし，合成スピンを $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s_1} + \boldsymbol{s_2}$ とする．以下の問いに答えよ．

1) ２個の粒子の入れ替えに関して反対称な規格化されたスピン関数は，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)$$

である．これが合成スピンの z 成分 S_z の固有関数であることを示し，S_z の固有値を求めよ．

2) ２個の粒子の入れ替えに関して対称なスピン関数は３個存在する．それらを規格化定数も含めて求めよ．

次に，フェルミ粒子のポテンシャル中での運動を考える．問 [1] で考えた空間座標についての波動関数を軌道関数と呼び，ハミルトニアン $\mathcal{H}_T$ で記述される運動をする２粒子系の波動関数が，対称な軌道関数 $\Phi_a(x_1, x_2), \Phi_b(x_1, x_2)$ と反対称な $\Phi_c(x_1, x_2)$ であるとする．全波動関数は軌道関数とスピン関数の積で表され，粒子の入れ替えに対して反対称になる．例えば，２個のフェルミ粒子が共に軌道 ϕ_g を占めるときの全波動関数は，

$$\Psi_a = \Phi_a(x_1, x_2)\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)$$

である．

3) ２個のフェルミ粒子がそれぞれ異なる軌道 ϕ_g と ϕ_e を占める場合について考えよう．

a) 軌道関数が $\Phi_b(x_1, x_2)$ のとき，全波動関数 Ψ_b を書け．またこの状態のエネルギー固有値を求めよ．

b) 軌道関数が $\Phi_c(x_1, x_2)$ のときには，３個の独立な全波動関数が存在する．これらをすべて書け．

4) この２粒子系の磁気モーメントを $\boldsymbol{M} = \mu\boldsymbol{S}$ とおき，外部から磁場 B が z 方向にかかることによる効果を含むハミルトニアンは $\mathcal{H}_T - BM_z$ で与えられるとする．ただし μ は定数である．このとき，問 3a, 3b で考えた４つの状態のエネルギーを求め，磁場により縮重度はどのように変化するかを述べよ．

5) この２粒子間に相互作用 $\mathcal{H}_I = K\boldsymbol{s_1}\cdot\boldsymbol{s_2}$ がはたらくときハミルトニアンは $\mathcal{H}_T + \mathcal{H}_I$ で与えられる．ただし K は定数である．このとき，問 3a, 3b で考えた４つの状態のエネルギーを求め，相互作用により縮重度はどのように変化するかを述べよ．

問題5 (熱・統計力学)

[1] と [2] は別々の解答用紙に解答せよ.

[1] 以下の問いに答えよ.

1) 2種類の異なる理想気体が1モルずつそれぞれ体積 V の容器に入っている. はじめ, 気体の温度は T_1 と T_2 であった. この2つの容器を接触させたときの熱力学的な変化について, 以下の問いに答えよ. 答案には答に至る過程も示すこと. なお, 2種類の気体の定積熱容量は等しく C(温度 T に依存しない定数) とし, 系は外界からは孤立しているものとする. また, 容器の熱容量は無視できるほど小さく, 温度変化による体積の変化もない.

a) 2つの容器を接触させた後, 平衡状態に達したときの温度 T_{eq} を求めよ.

b) 接触前後におけるエントロピーの変化量 ΔS を求めよ.

c) 平衡状態に達した後, 容器の接触部分を取り除いて気体が互いの容器間を自由に移動できるようした. このときのエントロピーの変化量 ΔS_{mix} を求めよ.

2) $\boxed{}$ にあてはまる熱力学的物理量を下から一つ選び, 文を完成させよ. 解答には同じ物理量を何度用いてもよい.

U(内部エネルギー), H(エンタルピー), F(ヘルムホルツの自由エネルギー), G(ギブスの自由エネルギー), S(エントロピー), p(圧力), V(体積), T(温度)

a) 気体が準静的に断熱変化したとき, 変化しないのは $\boxed{}$ である.

b) 理想気体が準静的に等温変化したとき, 変化しないのは T と $\boxed{}$ である.

c) 理想気体が準静的に等温変化したとき, 理想気体が外界から受け取る仕事は, 変化後と前における $\boxed{}$ の差に等しい.

d) 孤立したある安定相を圧力一定のまま温度変化させたところ, 別の安定相に一次相転移した. このとき, 転移温度における2つの相の p, T と $\boxed{}$ は等しい.

e) 孤立したある安定相を圧力一定のまま温度変化させたところ, 別の安定相に一次相転移した. このとき, 転移温度における2つの相の $\boxed{}$ の差を潜熱という.

[2] N 個の要素から成る下図のような 1 次元鎖を考える．各要素の長さは a で，一次元方向に対して右向きと左向きの二つの状態のみを取り，また要素間の関節は自由に折れ曲がるものする．鎖の一端は固定され，他方の端にはおもりがつり下げられ一定の張力 $f(>0)$ で鎖を引っ張っている．$i(=1,2,\cdots,N)$ 番目の要素の向きと長さを記述する変数 x_i（$x_i=-a,a$ の 2 通りの値をとる）を用いて，固定端からみた他方の端の位置は $X=\sum_{i=1}^{N}x_i$ で表わされる．おもりを含めた系の全エネルギーは $E=-fX$ と書かれる（これ以外のエネルギーは考えない）．この系が温度 T の平衡状態にあるとする．N は十分に大きな数，k_B をボルツマン定数として以下の問いに答えよ．全ての問題で解答の過程を示すこと．

1) 系の分配関数が

$$Z=\left[2\cosh\left(\frac{fa}{k_BT}\right)\right]^N$$

となることを示せ．但し $\cosh(x)=(e^x+e^{-x})/2$ である．

2) 全エネルギーの期待値 $\langle E\rangle$ を求めることで X の期待値 $\langle X\rangle=-\langle E\rangle/f$ が得られる．$\langle X\rangle$ を f,T の関数として求めよ．また十分高温でフックの法則 $f=\alpha\langle X\rangle$ が成り立つことを示し，ばね係数 α を求めよ．

3) エントロピー S を f,T の関数として求めよ．$f=0,\ f\to\infty$ における S の値をそれぞれ求めよ．

4) X^2 の期待値 $\langle X^2\rangle$ を f,T の関数として求めよ．鎖の平均的な長さ $\sqrt{\langle X^2\rangle}$ の $f=0$ における値を求めよ．