「対称性の視点によるソリトン方程式とパンルヴェ方程式」

菊地哲也 (Tetsuya KIKUCHI)
東北大学大学院理学研究科・数学専攻

KdV 方程式を典型例とする, 非線形偏微分方程式で記述されるソリトン方程式系と, パンルヴェ方程式を含む, 線形微分方程式のモノドロミー保存変形を記述する非線形常微分方程式系に対して, それぞれの系に対するアフィン・リー環, アフィン・ワイル群といった代数系で記述される対称性を実現する統一的な構成法 [1] について報告する.

パンルヴェ方程式というのは, 20 世紀初頭にフランスの数学者パンルヴェによって発見された, 6 種の非線形常微分方程式である. パンルヴェの研究の動機は新しい超越関数を見つけることであり, そのために「動く分岐点をもたない」という性質を持つ 2 階常微分方程式をすべてリストアップし, このうち楕円関数や線形微分方程式に帰着されない 6 種がパンルヴェの方程式である. この解析には, すでにコワレフスカヤがコマの運動に関して用いたものと共通した考え方が使われており, 今日パンルヴェ解析とよばれている. 彼はこの解析を n 体問題へも応用し, その後の研究の刺激となっている.

パンルヴェ方程式はもう一つ別の起源をもっている. それは線形微分方程式のモノドロミーの問題である. 線形微分方程式の係数があるパラメータ t に依存しているとき, そのモノドロミー行列も t ごとに定まるが, この状況でモノドロミーが一定になるための条件として t に関する微分方程式が成り立つ. この方程式ともとの線形微分方程式との両立条件としてパンルヴェの方程式とその一般化が得られるのである. この視点による研究は, 統計物理に現れる Ising 模型の相関関数のスケール極限がパンルヴェの方程式をみたすことを説明するための理論的な裏づけを与えている. その後もパンルヴェ方程式は数理物理学の様々な局面に登場しており, モノドロミーの問題が数理物理において極めて強力な武器であるということが実証された.

一方でさまざまなソリトン方程式を特殊化することによってパンルヴェ方程式が得られることも知られており, 逆散乱法で解ける非線形偏微分方程式とパンルヴェ解析とのあいだには関係があると信じられている. 本講演では, この対応関係を, 線形作用素の固有値を保存する変形 (ソリトン) とモノドロミーを保存する変形 (パンルヴェ) との対応としてとらえることにより, それぞれの系の可積分系としての代数的な対称性を統一的に理解できることを示す. この視点により, 方程式の q 差分化や量子化についても論ずることができる.

参考文献:

[1] Sabro Kakei, Tetsuya Kikuchi, “Affine Lie group approach to a derivative nonlinear Schrödinger equation and its similarity reduction” IMRN, volume 2004, issue 78, 4181-4209 (2004).