アインシュタイン計量と安定性

板東 重稔
東北大学 大学院 理学研究科 数学専攻

アインシュタイン計量の存在問題は微分幾何学における最も重要な問題の一つである。

局所的に座標がはいる様な空間を多様体という。各点で接ベクトルの間に内積が定まっている多様体をリーマン多様体といい、その内積をリーマン計量と呼ぶ。そのような空間では長さや体積の概念を自然に定めることが出来る。
ユークリッド空間はそのような空間の代表的な例であり、この場合半径 r のボールの体積は n 次元の場合 $\omega_n r^n$ と表わされる。ここで $\omega_1 = 2, \omega_2 = \pi, \omega_3 = 4\pi/3, \ldots$。
一般のリーマン多様体においては、点 p を中心とする半径 r のボールの体積 $V_p(r)$ は必ずしも $\omega_n r^n$ となるとは限らない。
r が小さいとき、ユークリッド空間との誤差 $(\omega_n r^n - V_p(r))/r^{n+2}$ はある関数 $S(p)$ で近似する事が出来る。この S をリーマン多様体のスカラー曲率と呼ぶ。
ボール全体ではなく、ある特定の方向 v 当りの体積の誤差を表わす量はリッチ曲率 $\mathrm{Ric}(v)$ と呼ばれる。
リッチ曲率 $\mathrm{Ric}(v)$ が v に依らす一定となるとき、リーマン多様体はアインシュタイン多様体と呼ばれ、そのリーマン計量はアインシュタイン計量と呼ばれる。
２次元の多様体には必ずアインシュタイン計量が入る事は古くから知られており、数学の様々な研究においてその事実はキーポイントとして重要な役割を担ってきた。
一方３次元以上の多様体には必ずしもアインシュタイン計量は入らない事も知られていた。近年、３次元多様体のアインシュタイン計量、あるいはアインシュタイン計量が停留点となるべきフロー: リッチフローの研究が飛躍的に進み、３次元幾何学の研究にブレークスルーが開かれた。
４次元以上では、座標変換が複素解析的に取れる空間: 複素多様体上で特別なアインシュタイン計量: アインシュタイン・ケーラー計量の存在問題に大きな進展が見られる。

予想:
アインシュタイン・ケーラー計量の存在は複素多様体の「安定性」と同値。

現在のところ大きな進展はあるものの、予想にいう「安定性」とは何かはまだ十分に解明されるには至っていない。

以上は多様体のアインシュタイン計量の話であるが、アインシュタイン計量の概念は複素多様体上の正則ベクトル束の場合にも拡張され、アインシュタイン・エルミート計量の概念が定義されている。この場合はアインシュタイン・エルミート計量に対応する「安定性」は比較的良く理解されており、対応する予想の成立が知られている。
また、正則ベクトル束の退化と見なせる解析的連接層に対してもアインシュタイン・エルミート計量の概念および「安定性」の概念は拡張され、この場合も予想の成立が知られている。