非圧縮性粘性流体の数理解析

小薗　英雄
東北大学大学院理学研究科数学専攻

本講ではナビエ・ストークス方程式の初期値問題

$$\text{(N-S)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = \nu \Delta u - \nabla p, \quad \mathrm{div}\ u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x,0) = a(x) \end{cases}$$

の**適切性**について論じる．任意に初期値 a を与えたとき，(N-S) が時間大域的な滑らかな解 $\{u, p\}$ を持つか？という問題は，ミレニアムにおける数学７難題のひとつとして2000年にClay研究所によって提唱された．ここでは，Leray, Serrin, 藤田–加藤，増田，儀我–宮川らの関数解析的解法を紹介した後，講演者による実解析の手法を用いた解の一連の研究を解説する．

Leray は任意の $a \in L^2$ に対して，$u \in L^\infty(0, \infty; L^2)$ かつ $\nabla u \in L^2(0, T; L^2)$ なる時間大域的弱解 u を構成した．Serrin はこの弱解 u が $u \in L^s(0, \infty; L^r)$, $2/s + 3/r = 1$, $3 < r \le \infty$ であれば一意的かつ変数 (x, t) について微分可能であることを示した．スケール不変な空間として最も重要な $r = 3$, すなわち $u \in L^\infty(0, T; L^3)$ なる弱解の一意性については，増田，小薗– Shor によって解決を見た．このクラスの弱解の正則性は，Leray によって提唱された後進自己相似解による爆発解の存在問題と密接な関係にある．Nečas-Ružička-Sverák, は定常的な方法で，実は後進自己相似解よる爆発解は存在しないことを証明した．そこで，$L^\infty(0, T; L^3)$ に属する弱解の正則性がホットな話題となり，最近になって Iskauriaza-Seregin-Sverák により肯定的に解決された．

これらは，まず最初に関数空間を広く選んで弱解を構成し，その後に解の一意正則性を考察するという偏微分方程式の近代的手法である．一方，グリーン関数や半群の理論を用いて直接滑らかな解を構成するという古典的手法が Ladyzehnskaya, Solonnikov, 藤田–加藤，儀我–宮川等によって確立された．すなわち，$a \in L^r$, $3 \le r \le \infty$ に対して，$T > 0$ と $u \in C([0, T); L^r)$ なる解（これを強解と呼ぶ）が一意的に存在することが証明された．Serrinの結果により，強解は実際には滑らかな関数である．これまでのところ，$T \propto 1/\|a\|_{L^r}^{2r/(r-3)}$ が得られているに過ぎず，一般に $T = \infty$ ととれるかどうかは未解決である．そこで，どのような条件があれば，この強解が時刻 T を越えて存在時間の延長が可能か？ということが問題となる．儀我は強解がSerrinのクラスに属すれば，延長可能であることを示した．すなわち，$u \in C([0, T); L^r)$ なる解が，$2/s + 3/r = 1$, $3 < r \le \infty$ なる r, s に対して条件 $\int_0^T \|u(t)\|_{L^r}^s dt < \infty$ を満たせば，$T' > T$ が存在して u は $C([0, T'); L^r)$ に属する解となる．一方，流体力学的な立場からは，渦度 $\omega = \mathrm{rot}\ u$ の挙動が流れを支配する．Beale-Kato-Majda は $\nu = 0$（オイラー方程式 ）の場合も込めて，$\int_0^T \|\omega(t)\|_{L^\infty} dt < \infty$ であれば，解の延長が可能であることを示した．彼らの証明のキーは Brezis-Gallouet による対数型ソボレフ不等式に類似した不等式を用いることであった．Brezis-Gallouetの不等式は，臨界ソボレフ空間 $H^{n/r,r}(\mathbb{R}^n)$ が本質的な役割を果たすが，関数空間をBMO や斉次ベゾフ空間 $\dot{B}^0_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$ まで拡張することが可能である：

$$\|f\|_{L^\infty} \le C\left(1 + \|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} \log(e + \|f\|_{H^{s,p}})\right), \quad s > n/p$$

更に，$u \cdot \nabla u \in \mathcal{H}^1$, $(\mathcal{H}^1)^* = BMO$ を用いると，$\int_0^T \|u(t)\|_{BMO}^2 dt < \infty$, または $\int_0^T \|\omega(t)\|_{BMO} dt < \infty$ なる条件下で延長可能であることが分かる．特に$\nu > 0$ の場合は，3次元渦度ベクトル $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ のうち 2自由度 ω_1, ω_2 を束縛する条件 $\int_0^T \|\omega_i(t)\|_{BMO} dt < \infty$, $i = 1, 2$ のみで 延長可能である．