研究課題

非線形解析学の手法による数理物理学研究

研究代表者

小薗　英雄　数学専攻・教授

Hideo Kozono

メールアドレス…kozono@math.tohoku.ac.jp

専 門 分 野…非線形偏微分方程式

主な研究課題…
- 数理物理学の研究
- 偏微分方程式論の研究
- 調和解析学の研究

研究目的

数理物理学の基礎方程式、数理生物学のモデルである非線形偏微分方程式を広範囲に渡って対象とし、解の存在、一意性、安定性といった“適切性”を研究する。手法として、従来の関数解析学や変分学的なアプローチに加えて、近年盛んに成果が挙げられている調和解析学を取り入れることに本研究の特色がある。実在する物理現象は多くの場合、重ね合せの原理、すなわち線形理論によっては予測され得ず、流体の運動はその典型的な例としてあげられる。波動力学、量子力学でさえも、相互作用の影響により線形方程式だけによる現象解析は困難であるとされている。このように物理工学の主要な対象は、重ね合せの効かない非線形偏微分方程式により記述されることが多い。また生物の形成形態を記述するモデルとしても今や非線形偏微分方程式は不可欠になっている。変分学の「峠の補題」、「concentration compactness」、調和解析学の「発散・回転の補題」等に見られる様に、非線形解析学は純粋数学と表裏一体となって研究が急速に進歩している。本研究では、20世紀後半の目覚ましい解析学の成果を基礎に、非線形偏微分方程式の多岐に渡りその局所的・大域的適切性を統一的に研究し、新世紀初頭に新たな理論を構築することを目指す。

研究内容

1　流体力学の基礎方程式

ナビエ・ストークス方程式に関して未解決である時間大域的一意可解性の問題は、一意性と正則性の両方が成り立つ弱解のクラスとして、n乗可積分空間L^n(nは空間次元)であることが予想されている。そこで、弱解がL^nに値をとる時間の関数として有界変動、有界の２つの場合について考察し、解の正則性が時間の経過と共にどの様に変化するかを研究する。また局所適切性に関しては、加藤敏夫は遺作論文の中で、$L^p, p<n$において考察する重要性を指摘している。これに関しては、最近のブルガンによる非線形シュレディンガー方程式の新解法が参考になる。すなわち、与えられた初期データーを低周波部分と高周波部分に分解し、低周波部分を滑らかな関数と見なして非線形方程式の時間局所古典解を構成する。高周波部分は粗い関数であるが、それを初期データとして線形ストークス方程式を解く。それぞれの解の和は、ナビエ・ストークス方程式の近似解を与える。ブルガンによれば、誤差が良く知られたセリンの正則性のクラスに属していることを証明すれば、結果として粗い初期データーのもとで、ナビエ・ストークス方程式の時間局所古典解が構成できると期待出来る.

2　波動・分散型方程式

非線形波動方程式においては、この10年間に“ストリッカー評価式”を更に発展させた基本解の時間－空間評価が威力を発揮し、初期データの微分可能性をできるだけ仮定しないで、時間局所解の構成が次々になされている。これらに共通する手法は非線形項の特殊な代数的構造に注目し、解の特異点の伝幡が線形の基本解に関係するごく特殊な領域にしか現れないことを証明することである。“null form”言われている代数的構造による非線形性の分類と方程式の可解性の関係を次元解析（scaling invariance）の観点から統一的に論じたい。また最近、フーリエ制限ノルムの方法により、KdV方程式の時間大域的適切性に関して最良な結果が得られた。分散型方程式ではベンジャミン－小野方程式が依然として多くの困難さを抱えているが、同方法を試みることにより、従来の適切性の結果を改善したい。

東北大学21世紀COEプログラム

ホームページ
http://www.math.tohoku.ac.jp/~sa2m17/homepage2/kozono.htm

研究分担者　柳田　英二（数学専攻・教授）
小谷　元子（数学専攻・教授）
板東　重稔（数学専攻・教授）
佐藤　得志（数学専攻・助手）
小川　卓克（数学専攻・教授）
川勝　年洋（物理学専攻・教授）
早川　美徳（物理学専攻・助教授）

研究協力者　高橋　　太（数学専攻・COE研究員）

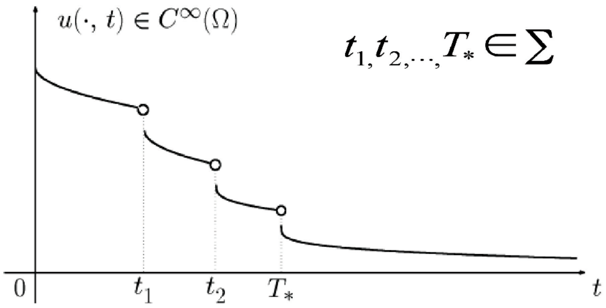
数理科学研究班

ナビエ・ストークス方程式: $\frac{\mathbf{Du}}{\mathbf{Dt}} = \nu\mathbf{\Delta} - \frac{1}{\rho}\nabla\mathbf{p},\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0,\ \mathbf{x}\in\mathbf{\Omega},\ \mathbf{t}>0$

$\mathbf{\Omega}$ ： ３次元空間内の任意の領域

定理 $\sum = \{t\in(0,\infty)\,|\,u(\cdot,t)\notin C^{\infty}(\Omega)\}$ **：解の特異点集合**

→ $H^{1/2}(\sum) = 0$ **（特異集合の1/2次元ハウスドルフ測度はゼロ）**



ナビエ・ストークス方程式が任意の初期データに対して滑らかな時間大域的な一意解を有するかどうかは、ミレニアムにおける数学の７問題のひとつとして2000年に提唱された。
問題の解決には100万ドルの懸賞金がかけられている。
本COEプログラム「数理科学研究班」では、空間内の任意の領域と任意の初期データ に対して、特異性が表れる時間の1/2ハウスドルフ測度が高々ゼロであるような解を構成することに成功した。

代表的な発表論文

1）乱流の数理　パリティ**18**巻 28 (2003).

2）Navier-Stokes 方程式　クレイ研究所ミレニアム懸賞問題解説　数学 **54**, 178(2002).

3）On well-posedness of the Navier-Stokes equations, Mathematical Fluid Mechanics, Recent results and open questions, Neustupa, J. & Penel, P. ed., Birkhäser Verlag207 (2001).

4）Rapid time-decay and net force to the obstacles by the Stokes flow in exterior domains, Math.Ann. **320**, 709 (2001).

5）Asymptotic stability of large solutions with large perturbation to the Navier-Stokes equations, J. Func. Anal. **176**, 153 (2000).