

(別紙様式1)

平成15年度東北大学21世紀COE特別研究奨励費 研究活動結果報告書

21世紀COE拠点リーダー

鈴木 厚人 殿

|               |                          |      |              |
|---------------|--------------------------|------|--------------|
| (ふりがな)<br>氏 名 | かとう じゅん<br>加藤 淳          | 所 属  | 資格 (いずれかを囲む) |
|               |                          | 数学専攻 | COEフェロー・博士課程 |
| 研究課題名         | 波動方程式の解の時空評価とその非線形問題への応用 |      |              |
| 研究指導者         | 所 属 部 局                  | 職 名  | 氏 名          |
|               | 理学研究科・数学専攻               | 教授   | 堤 誉志雄        |

## 研究活動結果の概要

研究計画調書に記載した研究目的及び実施計画に対し、その結果・実績について具体的に記載すること。

波動方程式は波や音の伝播を記述する、双曲型偏微分方程式の代表的なものである。本研究では非線形波動方程式

$$\partial_t^2 u - \Delta u = |u|^p, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \quad (1)$$

の自己相似解の存在について、非線形項の指数  $p$  との関係に着目して考察した。自己相似解とは方程式 (1) の解  $u$  で、任意の  $\lambda > 0$  に対し  $u(t, x) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda t, \lambda x)$  を満たすものであり、特に  $\lambda = 1/t$ ,  $u(1, y) = W(y)$  とおくことで、自己相似解は  $u(t, x) = t^{-\frac{2}{p-1}} W(x/t)$  なる特殊な波のパターンを記述することがわかる。また、自己相似解は一般の解の時間無限大での漸近挙動の解析に有用であることが知られている。

自己相似解の存在と非線形項の指数  $p$  との間には密接な関係があり、空間次元  $n$  に依存する定数  $p_c(n)$  が存在し、 $p > p_c(n)$  のとき自己相似解が存在し、 $p \leq p_c(n)$  のとき自己相似解は存在しないことが予想されている。上記の予想は存在部分に関しては空間次元  $n$  が 5 以下の場合に示されており、解に球対称性を仮定する場合は  $n \geq 2$  で示されている。本研究では空間次元  $n$  が 6 以上で  $p > p_c(n)$  の場合に自己相似解の存在を考察した。

これまでの研究により、 $p > p_c(n)$  の場合に自己相似解の存在を示すには、波動方程式の解に対する重み付きストリッカーズ評価と呼ばれる解の重み付きの時空評価を示せば良いことがわかっている。この不等式は球対称性を仮定する場合は正しいことが示されており、それをを用いることで球対称な自己相似解の存在が  $p > p_c(n)$  の場合に示されている。また、球対称性を仮定する評価を基礎にして、評価に現れる  $L^q$  ノルムを動径方向と球面方向に分解し、球面方向に関して  $L^2$  型の空間を用いることで球対称性を仮定せず空間次元が 5 以下の場合に自己相似解の存在が示されている。

本研究では上記の球面方向の評価を改善することで高次元の場合を取り扱うことを試み、以下の結果を得た。

### (1) 波動方程式の解の球面部分の球面調和関数による分解

波動方程式の解の表示式の球面部分を Funk-Hecke formula, Legendre 多項式の性質を用いることで球面調和関数で分解できることを示した。この結果は解の球面方向の評価を考察する上で有用である。

### (2) 球面方向の評価に関する反例

球対称性を仮定する評価を基礎にして球面方向の評価を改善することでは高次元の場合を取り扱える評価は得られないことが示された。

上記の研究を進めるため、関連する文献を購入した。また、関連分野の研究者との情報交換及び最新の情報や知識を得るため、研究打ち合わせ旅費を使用した。

研究発表

(学術雑誌に 15 年度中に発表または掲載決定したもの、  
および 15 年度中の学会等での本人の発表)

研究論文

- [1] Jun Kato, Tohru Ozawa,  
On solutions of the wave equation with homogeneous Cauchy data,  
Asymptotic Anal. **37** (2004), 93-107.
- [2] Jun Kato, Tohru Ozawa,  
Weighted Strichartz estimates and existence of self-similar solutions for semilinear wave equations,  
Indiana Univ. Math. J. **52** (2003), 1615-1630.
- [3] Jun Kato, Tohru Ozawa,  
Weighted Strichartz estimates for the wave equation in even space dimensions,  
Math. Z. に掲載決定.

学会等での発表

- [1] On some generalization of the weighted Strichartz estimates for the wave equation and application to self-similar solutions, Sapporo Guest House Symposium On Mathematics 15, Evolution Equations, 2003 年 11 月, 札幌.
- [2] On some generalization of the weighted Strichartz estimates for the wave equation and self-similar solutions to nonlinear wave equations, 東北大学応用数学セミナー, 2003 年 11 月, 仙台.
- [3] On some generalization of the weighted Strichartz estimates for the wave equation and application to self-similar solutions, Nonlinear Wave and Dispersive Equations, 2003 年 12 月, 仙台.
- [4] 重み付き Strichartz 型評価と非線形波動方程式の自己相似解への応用, 九州大学関数方程式セミナー, 2003 年 12 月, 福岡.