

東北大学大学院理学研究科物理学専攻・数学専攻・天文学専攻

21世紀 COE 拠点形成プログラム

「物質階層融合科学の構築」

平成15年度リサーチ・アシスタント (RA) 研究報告書

氏名	坂本 伸幸
学籍番号	
専攻	東北大学大学院理学研究科 数学 専攻
学年	博士課程後期3年の課程 3年
指導教官	田中 一之 教授
研究題目	実数と実数平面の数学
I. 研究発表 (学術雑誌に15年度中に発表または掲載決定したもの、および15年度中の学会等での本人の発表)	
Nobuyuki Sakamoto and Kazuyuki Tanaka, The Strong Soundness Theorem for Real Closed Fields and Hilbert's Nullstellensatz in Second Order Arithmetic. Archive for Mathematical Logic に掲載決定.	
平面上の曲線と逆数学. 証明論研究会 (Proof Theory 2003). 2003年8月31日-9月2日. 法政大学市ヶ谷キャンパス.	
平面上の曲線と逆数学. 日本数学会2003年度秋季総合分科会. 2003年9月24日-27日. 千葉大学西千葉地区.	
平面上の曲線と逆数学. 数学基礎論若手の会 2003. 2003年11月28日-30日. 東海大学山中湖セミナーハウス.	
On the strength of the Jordan curve theorem. TAKEUTI SYMPOSIUM. 2003年12月17日-19日. 神戸大学.	

## II. 研究活動結果の概要

### 「逆数学プログラムの幾何学的方面からの研究」

逆数学とは, H. Friedman によって始められ, S. G. Simpson や K. Tanaka らによって活発な研究領域に発展した数学基礎論の研究プログラムで, 数学の個々の定理を証明するのに2階算術の強い体系  $Z_2$  のどの部分体系が真に必要なかを調べるものである. 具体的には, 計算可能数学の形式化ともいえる体系  $RCA_0$  において, 数学の個々の定理が無限 0-1 木の道の存在を主張する  $WKL_0$ , 算術的論理式で表現される集合の存在を主張する  $ACA_0$ , 等の体系のいずれかと同値か, あるいはそれらのどれとも同値でないか, を調べるものである. 私は幾何的な定理に関する逆数学プログラムのいくつかの結果を得た. 以下にその一部を挙げる.

①  $RCA_0$  上, 以下の主張は同値:

i)  $WKL_0$ .

ii) コンパクト可分距離空間から可分距離空間への全単射連続関数は連続な逆関数を持つ.

iii) Jordan の曲線定理.

iv) 平面が Jordan 曲線と空でない2つの開集合に分割されているならば, それらの開集合は折れ線連結.

v)  $\mathbb{R}^2$  の弧状連結開集合は折れ線連結.

②  $RCA_0$  上, 以下の主張は同値:

i)  $ACA_0$ .

ii)  $\mathbb{R}^2$  の連結開集合は弧状連結.

### 「逆数学プログラムと recursion theory, descriptive set theory 等との関連」

大阪府立大学の山崎武氏との共同研究によって, U. Kohlenbach の結果を発展させ, 論文にまとめた. この結果は高階の算術の逆数学に関するものである. 高階の算術の逆数学とは,  $RCA_0$  の自然な高階算術への拡張である外延性を持つ体系  $RCA_0^\omega$  において, 数学の定理の「一様版」の強さがどうなるかを調べようというもので, 高階の recursion theory と深く関わる研究である. 具体的には

① 体系  $RCA_0^\omega$  において, 公理  $(E^2)$  と, 与えられた「枝の多い」0-1 木  $T$  (具体的には,  $\#\{\sigma \in T : \sigma \text{ の長さ} = n\} > 2^{n^m}$  をすべての自然数  $n$  に対して成り立たせる自然数  $m$  が存在するような  $T$ ) の道を返す高階の汎関数の存在を主張する公理  $UWWKL$  が同値.

② 体系  $RCA_0^\omega$  において, 与えられた可算可換環の素イデアルを返す高階の汎関数の存在も  $(E^2)$  と同値.

③  $\Sigma_1^0$  分離公理の一様版は  $RCA_0^\omega$  上  $(E^2)$  と同値になる.

などの結果を得た.