

東北大学大学院理学研究科物理学専攻・数学専攻・天文学専攻

21世紀 COE 拠点形成プログラム

「物質階層融合科学の構築」

平成15年度リサーチ・アシスタント (RA) 研究報告書

氏名	井上 和俊
学籍番号	
専攻	東北大学大学院理学研究科 数学 専攻
学年	博士課程後期3年の課程 1 年
指導教官	板東 重稔 教授
研究題目	ヒッグス・ハーミシャン・ヤン・ミルズ計量の存在問題
I. 研究発表 (学術雑誌に15年度中に発表または掲載決定したもの、および15年度中の学会等での本人の発表)	
2003年5月に、本学の幾何セミナーにて講演を行いました。 講演タイトル: 「コンパクト複素多様体上の Higgs-Hermitian-Yang-Mills 計量」	

II. 研究活動結果の概要

今回の研究の目的は、コンパクトなゴードেশヨン多様体上の安定なヒッグス束は、ヒッグス・ハーミシヤン・ヤン・ミルズ（以下、HHYM）計量を許容するか、という問題を解決することであった。C.T.Simpson は、コンパクトなケーラー多様体上の場合に二階の放物型偏微分方程式の初期値問題を考え、問題を肯定的に解決しているので、我々もそれに習って同様の方法をとることにした。したがって多くの時間を解析のための勉強に費やす必要があった。

まずは、解を持つ方程式を見つける必要がある。さて、ヒッグス束を E とし、ファイバーのエルミート計量 h を固定する。そこで、時刻 $t (> 0)$ をパラメタにもち、 $t=0$ では恒等写像であるような、 E の自己同型写像(ゲージ変換)の 1 径数族を考える。この自己同型は E のファイバーの線形変換 $GL(E)$ に値を取るものとする。多様体の局所座標近傍を一つ選び HHYM 条件を考慮すると、自己同型写像に関する $(0, T) \times C^n$ (ただし、 T は正の定数、 n は多様体の次元) 上の二階の偏微分方程式が自然に導かれる。

Simpson はケーラー多様体上で考えているため方程式はエルミート部分のみからなり、またそれだけ考えれば十分で、しかも二階放物型の方程式になるために偏微分方程式の一般論を適用することが出来た。しかし、ここで問題となるのは、我々はケーラー条件よりも緩い条件を仮定しているため、方程式は Simpson のようにはならないという点である。我々の方程式は二階の偏微分方程式ではあるが、エルミート・歪エルミート部分が混在し、しかもは放物型にはならない。

この困難を解決するために、我々はまず自己同型写像をエルミート部分とユニタリ部分の積に分解した。そして、もとの方程式と、計量 h に関して共役をとった方程式との「和」および「差」を計算した。すると、「和」の方からは方程式のエルミート部分のみが取り出され、二階の放物型方程式になることが分かった。この方程式は Simpson が考えた方程式とほぼ同じ形をしている。また、「差」の方からは、方程式の歪エルミート部分が取り出されて、写像のユニタリ部分に関する t を変数とした一階の常微分方程式となった。よってこれらのことから、我々の方程式は時刻 t に関して局所解をもつことが従う。さらに、Schauder 理論等から、方程式が大域解をもつことが期待され、問題の解決に近づいていることが分かる。

以上がこれまで分かったことの概要である。今後問題を解決するために、多様体にケーラー条件がある場合に本質的に証明のどの部分に効いているのか明らかにすることと、我々は一般の変換を考えているため、自己同型群の自由度が大きく、どうしても新たなゲージ固定条件を考えなければならないということ、そして、時刻を無限大に飛ばしたときの収束性が当面の課題として残される。